И.В. ХОРИНА
М.А. БРАЖНИКОВ

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Издание 3-е, дополненное

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Национальная и мировая экономика»

И.В. ХОРИНА
М.А. БРАЖНИКОВ

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Издание 3-е, дополненное

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

ББК 65.050
УДК 658.012.4
Х 79

Хорина И.В.

Х 79 **Методы исследования и моделирования национальной экономики**: Учеб. пособ. / И.В. Хорина, М.А. Бражников. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 201 с.

Рассмотрены основные экономико-математические методы и модели анализа, оптимизации ресурсов и принятия решений в разнообразных условиях определенности, риска и неопределенности и их применение в производстве, экономике, финансах и бизнесе. Исследованы типовые и усложненные экономико-математические модели задач математического программирования, статистического анализа данных, ряда моделей эконометрики, принятия решений с пояснением на примерах из сферы национальной экономики.

Предназначено для студентов инженерно-экономического факультета, обучающихся по специальности 06.07.00 «Национальная экономика».

Рецензент д-р экон. наук В.М. Шепелев

ББК 65.050
УДК 658.012.4
Х 79

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная экономическая наука широко использует математические методы как для решения прикладных, практических задач, так и для теоретического моделирования социально-экономических явлений и процессов. Учебных пособий, в которых бы рационально совмещались теоретические основы математических методов, применяемых в экономических исследованиях, и практические задания по решению соответствующих задач, исключительно мало. Поэтому данное учебное пособие, которое было подготовлено на базе лекционного курса, читаемого авторами на инженерно-экономическом факультете Самарского государственного технического университета, должно восполнить этот недостаток.

Пособие состоит из введения и девяти глав.

Во введении рассматриваются основные исторические этапы применения математических методов в экономических исследованиях.

В первой главе «Основные понятия математического моделирования социально-экономических систем» раскрываются общие понятия системного анализа и моделирование систем и процессов в экономике, рассматривается сущность основных этапов экономико-математического моделирования, приводится краткая классификация экономико-математических методов и моделей.

Вторая глава «Оптимизационные экономико-математические модели» посвящена вопросам применения методов математического моделирования для решения ряда оптимизационных экономических задач. Отдельные параграфы посвящены методам целочисленного программирования, задачам векторной оптимизации, сетевым моделям управления. Приводится ряд сведений о методах имитационного моделирования.

В третьей главе «Методы и модели анализа динамики экономических процессов» представлены основные понятия временных рядов экономических показателей на примере одномерных временных рядов. Приводятся формулы и примеры расчета основных показателей динамики развития экономических систем. Особое внимание уделено анализу сезонности в экономических процессах.

Четвертая глава «Модели прогнозирования экономических процессов» рассматривает вопросы экономического прогнозирования, в том числе такие принципы разработки прогнозов, как системность, адекватность и альтернативность. Особое внимание уделено оценке адекватности и точности трендовых моделей на основе кривых роста. Приводятся основные сведения об адаптивных методах и моделях прогнозирования.

Пятая глава «Балансовые модели» посвящена проблеме применения балансовых методов в экономико-математическом моделировании. Рассмотрены основные понятия балансового метода в экономических исследованиях, описана принципиальная схема межотраслевого баланса. Приводятся примеры использования балансовых моделей для анализа экономических показателей.

В шестой главе «Эконометрические модели» рассмотрены общие понятия об эконометрических моделях, параметры которых оцениваются с помощью методов математической статистики. Изучаются наиболее такие наиболее распространенные эконометрические модели, как регрессионные факторные модели, описан порядок их решения.

В седьмой главе «Корреляционная связь и ее статистическое изучение» рассмотрены основные понятия о корреляционной связи и предпосылки ее использования. Представлены статистические методы выявления наличия корреляционной связи между двумя признаками, а также измерение тесноты корреляционной связи. Изучаются такие вопросы как уравнение регрессии, множественная корреляция.

Глава восьмая «Модели рынков» рассматривает простейшие модели рынков. Приводятся основные модели распределения, модель обмена и цены, а также классические модели важнейших рынков и объединенная модель рынков.

В главе девятой «Модели экономического взаимодействия на простейших рынках» раскрываются общие понятия спроса и предложения на рынке одного товара, рассматривается особенность условия работы двух фирм на рынке одного товара. Основное внимание уделяется взаимодействию двух фирм, включая их угрозы и торги.

При работе над пособием авторы использовали многочисленные источники – как отечественные, так и зарубежные.

В последние годы все направления математического моделирования и оптимизации получили дальнейшее развитие, а некоторые из них сложились в самостоятельные дисциплины со своей методологией, системой обозначений и терминологией. Авторы, насколько это возможно, постарались добиться в рамках учебного пособия определенной унификации терминологии и обозначений.

ВВЕДЕНИЕ
ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИКА: ИСТОРИЧЕСКИЕ ВЕХИ

Применение математических методов, в том числе и методов математического моделирования, в экономике имеет свою историю.

Основатель классической школы политической экономии В. Петти (1623-1687) в предисловии к «Политической арифметике» указывал, что его способ исследования «не обычный, ибо вместо того, чтобы употреблять слова только в сравнительной и превосходной степени и прибегать к умозрительным аргументам, я вступил на путь выражения своих мыслей на языке чисел, весов и мер, я уже давно стремился пойти по этому пути, чтобы показать пример политической арифметики».

Революционный демократ, крупнейший экономист своего времени Н.Г. Чернышевский (1828-1889) в замечаниях по поводу трактата Д.С. Миля «Основания политической экономии» писал: «Мы видели уже много примеров тому, какими приемами пользуется политическая экономия при решении своих задач. Эти приемы математические. Иначе и быть не может, потому что предмет науки – количества, подлежащие счету и мере, понимаемые только через вычисление и измерение».

Большое значение применению математических методов в политической экономии придавал К. Маркс. Закономерности движения прибавочной стоимости, прибыли, ренты, процесса простого и расширенного воспроизводства излагаются Марксом с помощью средств математики. Математически, в виде алгебраических уравнений и неравенств, К. Маркс выразил основные условия простого и расширенного воспроизводства.

С середины XIX в. в теоретических исследованиях используется все более и более сложный математический аппарат. В последнее тридцатилетие XIX в. складывается самостоятельное математическое направление политической экономии.

Родоначальником математической школы считается французский ученый О. Курно (1801-1877). В 1838 г. вышла его книга «Исследование математических принципов теории богатства» (О. Курно был известным математиком, философом, историком и экономистом).

Видными представителями математической школы являются Г. Госсен (1810-1859) в Германии, В. Джевонс (1835-1882) в Англии, Л. Вальрас (1834-1910) в Швейцарии, Г. Кассиль (1866-1944) в Швеции, Ф. Эджворт (1845-1926) в Англии, В. Парето (1848-1923) в Италии, В. Дмитриев (1868-1913) в России.

Заслуженное место в истории математического моделирования потребления занимает работа известного русского ученого Е.Е. Слуцкого (1880-1948) «К теории сбалансированного бюджета потребления», опубликованная в 1915 г. в Италии. Е.Е. Слуцкий стремился освободить моделирование поведения потребителя от субъективистских психологических наслоений. «Если мы хотим подвести под экономику надежную базу, то мы должны сделать ее совершенно независимой от психологических утверждений».

Родоначальники математической школы рассматривали математические методы, математическое моделирование связей между элементами экономической системы как методы исследования, а не как методы изложения, иллюстраций экономических положений и законов, полученных другим путем.

Представители математической школы с помощью математических методов стремились разрешить не отдельные частные проблемы теоретической политической экономии, а охватить весь экономический процесс в целом, дать общую картину взаимозависимостей всех явлений хозяйственной жизни, законов равновесия данной экономической системы.

Не останавливаясь на теоретических взглядах и моделях основателей математической школы, приведем лишь некоторые достижения, сыгравшие заметную роль в развитии математического направления в экономике. В 1909 г. Митчерлих предложил нелинейную производственную функцию для анализа сельскохозяйственного производства в США (удобрения – урожайность).

В 1928 г. Ч. Кобб и П. Дуглас на основе данных по обрабатывающей промышленности США за период 1899-1922 гг. представили первую эмпирическую производственную функцию, построенную по данным временных рядов.

В том же 1928 г. В. Рамсей предложил упрощенную модель, в которой дается не только описание долгосрочного роста, но и ставится проблема определения его оптимального варианта. Эта модель стала предвестницей оптимизационного подхода к проблемам экономического роста.

В 1932 г. Дж. фон Нейман изложил основы многосекторной модели расширяющейся экономики, в которую ввели понятие динамического равновесия. С моделью Неймана связаны знаменитые теоремы о магистрали. Модель построена в предположении совершенной конкуренции.

В 1936 г. В. Леонтьев опубликовал основы метода (модели) «затраты – выпуск». В. Леонтьеву были хорошо известны работы советских экономистов по балансу народного хозяйства за 1923-1924 гг., в основу которого были положены идеи схем воспроизводства К. Маркса. В качестве исходного момента В. Леонтьев использовал модель общего экономического равновесия Л. Вальраса, прежде всего идею технологических коэффициентов.

В 1931 г. было создано Международное эконометрическое общество, видным представителем и активным деятелем которого был норвежский ученый Р. Фриш (1895-1973). Термин «эконометрика» Р. Фриш ввел для обозначения направления, которое должно было представлять синтез экономической теории, математики и статистики. В дальнейшем круг проблем, разрабатываемых в рамках данного направления, сузился, и сегодня в понятие «эконометрика» включаются главным образом построение математико-статистических моделей экономических процессов (так называемых эконометрических моделей) и использование методов математической статистики для определения параметров этих моделей.

Реакцией на конкретные проблемы государственно-монополистического капитализма, на кризис 1929-1933 гг. явилась работа Д.М. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег», опубликованная в 1936 г. В модельном отношении особое значение имеет введенный Кейнсом мультипликатор, который послужил основой ряда макроэкономических моделей.

Значительную роль в разработке моделей роста сыграл Р. Солоу. В статье, опубликованной в 1956 г., он предложил простую модель, которая привела к появлению многочисленных исследований в области неоклассических моделей роста. Разработка неоклассических моделей роста приводит к постановке задачи оптимальной нормы накопления, получившей название «золотого правила». В 1960-х гг. почти одновременно и независимо друг от друга это правило сформулировали Дж. Робинсон, Д. Мид, Э. Фелпс.

Важное место в развитии математического направления в экономике занимают работы советских ученых Л.В. Канторовича, В.В. Новожилова, В.С. Немчинова. Работа Л.В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» (Ленинград, 1939) положили начало новому направлению в математической экономике – методам линейного программирования, методам математического программирования. Его работа «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» вышла двумя изданиями в 1959 и 1960 гг. и была переведена на английский, французский, испанский и другие языки.

В последнее время в экономических исследованиях активно развиваются направления, связанные с использованием математических аппаратов теории оптимального управления, динамического программирования, теории игр.

Характерной чертой современного развития национальной экономики является более широкое использование математических методов и моделей как в анализе важнейших теоретических, так и в решении конкретных прикладных задач.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цели изучения

Основные задачи представленного материала:

– ознакомиться с характеристиками анализа социально-экономических систем и процессов;
– сформулировать понятия «модель» и «метод моделирования»;
– определить особенности социально-экономических систем как объектов моделирования;
– охарактеризовать этапы экономико-математического моделирования.

Основные вопросы

Социально-экономические системы, методы их исследования и моделирование. Понятие «экономическая система». Термин «экономико-математические методы». Социально-экономическая система и метод моделирования. Модель и адекватность моделируемого объекта.

Этапы экономико-математического моделирования. Состав процесса моделирования и общая схема процесса моделирования. Этапы процесса моделирования объекта и их характеристика.

Классификация экономико-математических методов и моделей. Состав экономико-математических методов. Классификация математических моделей социально-экономических систем и процессов. Основные признаки классификации моделей.

1.1. СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Если понятие «экономическая система» более или менее сложилось и в широком смысле трактуется как система общественного производства и потребления, материальных благ, то социальные аспекты жизни общества весьма многогранны и не всегда доступны для детального анализа, моделирования и прогнозирования.

Вместе с тем некоторые социальные проблемы являются объектом исследования национальной экономики. В качестве примера можно привести проблему анализа и прогнозирования покупательского спроса в маркетинге, задачу анализа распределения работников по уровню заработной платы в экономике и социологии труда и др.

Многие из проблем такого рода могут быть решены с использованием экономико-математических методов и моделей.

Рассмотрим ряд основных понятий, связанных с системным анализом и моделированием социально-экономических систем.

Термин «экономико-математические методы» понимается как обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединённых для изучения социально-экономических систем и процессов.

Под **социально-экономической системой** будем понимать сложную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ. Она относится к классу систем управляемых.

Центральным понятием является понятие «система».

Системой называется комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями между элементами и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему, если выявлены следующие четыре признака:

– целостность системы;
– наличие цели и критерия исследования данного множества элементов;
– наличие более крупной системы, внешней по отношению к данной, называемой «средой»;
– возможность выделения в данной системе взаимосвязанных частей (подсистем).

Основным методом исследования систем является **метод моделирования** – способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. При этом под моделью будем понимать образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме, отражающий существенные свойства моделируемого объекта (процесса) и замещающий его в ходе исследования и управления. Такое отражение объекта может быть представлено схемой, эскизом, фотографией, моделью описательного характера в виде графиков и таблиц и т.д.

Метод моделирования основывается на принципе аналогии, т.е. возможности изучения реального объекта не непосредственно, а через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта, его модели. Далее мы будем говорить только об экономико-математическом моделировании, т.е. об описании знаковыми математическими средствами социально-экономических систем.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

– анализ экономических объектов и процессов;
– экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
– выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» средства, используемые для поддержки принятия решений. Принятие управленческих решений остаётся за человеком.

Важнейшим понятием, как и при всяком моделировании, является понятие **адекватности модели**, т.е. соответствия модели моделируемому объекту или процессу. Адекватность модели – условное понятие, т.к. полного соответствия модели реальному объекту быть не может, что характерно и для экономико-математического моделирования. Проверка адекватности экономико-математических моделей является весьма серьезной проблемой, тем более что ее осложняет трудность измерения экономических величин. Однако без такой проверки применение результатов моделирования в управленческих решениях может не только оказаться мало полезным, но и принести существенный вред.

Социально-экономические системы относятся, как правило, к так называемым **сложным системам**. Сложные системы в экономике обладают рядом свойств, которые необходимо учитывать при их моделировании, иначе невозможно говорить об адекватности построенной экономической модели.

Важнейшие из этих свойств:

– целостность системы, т.е. наличие у экономической системы таких свойств, которые не присущи ни одному из составляющих систему элементов, взятых в отдельности, вне системы;
– массовый характер экономических явлений и процессов;
– динамичность экономических процессов, заключающаяся в изменении параметров и структуры экономических систем под влиянием среды (внешних факторов);
– случайность и неопределенность в развитии экономических явлений;
– невозможность изолировать протекающие в экономических системах явления и процессы от окружающей среды;
– активная реакция социально-экономических систем на появляющиеся новые факторы.

Выделенные свойства социально-экономических систем осложняют процесс их моделирования, однако эти свойства следует постоянно иметь в виду, начиная с выбора типа модели и кончая вопросами практического использования результатов моделирования.

1.2. ЭТАПЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Процесс моделирования включает в себя три структурных элемента:

1) объект исследования;

2) субъект (исследователь);
3) модель, с помощью которой установлены отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Рассмотрим общую схему процесса моделирования, состоящую из четырех этапов.

Пусть имеется некоторый объект, который мы хотим исследовать методом моделирования. На **первом этапе** проектируется (или отыскивается в реальном мире) другой объект – модель исходного объекта-оригинала. Этап предполагает наличие определенных сведений об объекте-оригинале. Для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта или характеризующих его с разной степенью детализации.

На **втором этапе** процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Конечным результатом этого этапа является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала, которые отражены в данной модели.

Третий этап заключается в переносе знаний с модели на оригинал, в результате чего формируется совокупность знаний об исходном объекте; при этом осуществляется переход с языка модели на язык оригинала. С достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал можно лишь в том случае, если этот результат соответствует признакам сходства оригинала и модели (другими словами, признакам адекватности).

На **четвертом этапе** осуществляются практическая проверка полученных с помощью модели знаний и использование их как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для его целенаправленного преобразования или управления им.

Моделирование представляет собой циклический процесс, т.е. за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а первоначально построенная модель постепенно совершенствуется. Таким образом, в методологии моделирования заложены большие возможности самосовершенствования.

Перейдем теперь непосредственно к процессу экономико-математического моделирования.

Первый этап – **постановка экономической проблемы** и ее качественный анализ. На этом этапе требуется:

– сформулировать сущность проблемы;
– выделить важнейшие черты и свойства моделируемого объекта;
– изучить его структуру и взаимосвязь его элементов;
– предварительно сформулировать гипотезы, объясняющие поведение и развитие объекта.

Следующий этап – **построение математической модели**. Это этап формализации экономической проблемы, т.е. выражения ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.). Построение модели подразделяется в свою очередь на несколько стадий:

– определяется тип экономико-математической модели;
– изучаются возможности ее применения в данной задаче;
– уточняется конкретный перечень переменных и параметров;
– устанавливается форма связи.

Основная задача третьего этапа – **математический анализ модели:** с помощью математических приемов исследования выявляются общие свойства модели и ее решений. В частности, важным моментом является доказательство существования решения сформулированной задачи. Однако модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию; в таких случаях переходят к численным методам исследования.

Четвертый этап – **подготовка исходной информации**. В экономических задачах это, как правило, наиболее трудоемкий этап моделирования, т.к. дело не сводится к пассивному сбору данных. Математическое моделирование предъявляет жесткие требования к системе информации; при этом надо принимать во внимание не только принципиальную возможность подготовки информации требуемого качества, но и затраты на подготовку информационных массивов. В процессе подготовки информации используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т.д. При системном экономико-математическом моделировании результаты функционирования одних моделей служат исходной информацией для других.

Пятый этап – **численное решение.** Он включает разработку алгоритмов численного решения задачи, подготовку программ на ЭВМ и непосредственно проведение расчетов. При этом значительные трудности вызываются большой размерностью экономических задач. Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным.

Шестой этап – **анализ численных результатов** и их применение. На этом этапе решается важнейший вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели. Применение численных результатов моделирования в экономике направлено на решение практических задач. Выше уже сказано о циклическом характере процесса моделирования. Недостатки, которые не удается исправить на тех или иных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах. Однако результаты каждого цикла имеют и вполне самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно получить полезные результаты, а затем перейти к созданию более сложной и более совершенной модели, включающей в себя новые условия и более точные математические зависимости.

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ

Суть экономико-математического моделирования заключается в описании социально-экономических систем и процессов в виде экономико-математических моделей. В силу этого экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования.

Рассмотрим вопросы классификации экономико-математических методов. Эти методы, как отмечено выше, представляют собой комплекс экономико-математических дисциплин, являющихся объединением экономики, математики и кибернетики. В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы.

1. Экономическая кибернетика:

– системный анализ экономики;

– теория экономической информации;

– теория управляющих систем.

2. Математическая статистика:

– выборочный метод;

– дисперсионный анализ;

– корреляционный анализ;

– регрессионный анализ;

– многомерный статистический анализ;

– факторный анализ;

– теория индексов.

3. Математическая экономия и изучающая те же вопросы с количественной стороны *эконометрия:*

– теория экономического роста;

– теория производственных функций;

– межотраслевые балансы;

– национальные счета;

– анализ спроса и потребления;
– региональный и пространственный анализ;
– глобальное моделирование.

4. Методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике. Это наиболее объемный раздел, включающий в себя следующие дисциплины и методы:

– оптимальное (математическое) программирование;
– методы ветвей и границ;
– сетевые методы планирования и управления;
– программно-целевые методы планирования и управления;
– теория и методы управления запасами;
– теория массового обслуживания;
– теория игр;
– теория и методы принятия решений;
– теория расписаний.

5. Методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики.

К первым можно отнести:

– теорию оптимального функционирования экономики;
– оптимальное планирование;
– теорию оптимального ценообразования;
– модели материально-технического снабжения;

ко вторым:

– методы, позволяющие разработать модели свободной конкуренции;
– модели капиталистического цикла;
– модели монополии;
– модели индикативного планирования;
– модели теории фирмы.

6. Методы экспериментального изучения экономических явлений:

- математические методы анализа и планирования экономических экспериментов;
- методы машинной имитации (имитационное моделирование);
- деловые игры.

Сюда можно отнести также и методы экспертных оценок, разработанные для оценки явлений, не поддающихся непосредственному измерению.

Перейдем к вопросам классификации экономико-математических моделей. Единой системы классификации таких моделей в настоящее время не существует, однако выделяют более десяти основных признаков их классификации, или классификационных рубрик. Рассмотрим некоторые из этих рубрик.

1. По общему *целевому назначению*:
   - *теоретико-аналитические* – модели, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов;
   - *прикладные* – применяемые в решении конкретных экономических задач анализа, прогнозирования и управления.
2. По *степени агрегирования* объектов:
   - *макроэкономические* (модели, отражающие функционирование экономики как единого целого);
   - *микроэкономические* (модели связаны с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы).
3. По конкретному *предназначению* – по цели создания и применения:
   - *балансовые* модели, выражающие требование соответствия наличие ресурсов и их использования;
   - *трендовые* модели, в которых развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд (длительную тенденцию) систему основных показателей;

– *оптимизационные* модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления;
– *имитационные* модели, предназначенные для использования в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов.

4. По *типу информации*:
– *аналитические;*
– *идентифицируемые.*

5. По учету *фактора времени*:
– статические – в рамках, которых все зависимости отнесены к одному моменту времени;
– динамические, описывающие экономические системы в развитии.

6. По учету *фактора неопределенности*:
– *детерминированные*, если в них результаты на выходе однозначно определяются управляющими воздействиями;
– *стохастические* (вероятностные), если при задании на входе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты в зависимости от действия случайного фактора.

Экономико-математические модели могут классифицироваться по *характеристике математических объектов* (по типу математического аппарата используемого в модели). По этому признаку могут быть выделены:

1) матричные модели;
2) модели линейного и нелинейного программирования;
3) корреляционно-регрессионные модели;
4) модели теории массового обслуживания;
5) модели сетевого планирования и управления;
6) модели теории игр.

По типу подхода к изучаемым социально-экономическим системам выделяют дескриптивные и нормативные модели:

1) *дескриптивный (описательный) подход* – модели, предназначенные для описания и объяснения фактически наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений; в качестве примера дескриптивных моделей можно привести балансовые и трендовые модели;
2) *нормативный подход* – исследует не то, каким образом устроена и развивается экономическая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать в смысле определенных критериев. В частности, все оптимизационные модели относятся к типу нормативных. Другим примером могут служить нормативные модели уровня жизни.

В качестве примера можно рассмотреть экономико-математическую модель межотраслевого баланса. С учетом приведенных выше квалификационных рубрик это прикладная, макроэкономическая, аналитическая, дескриптивная, детерминированная, балансовая, матричная модель.

Контрольные вопросы

1. Объясните, в чем заключается смысл системного подхода к анализу социально-экономических систем и процессов.

2. Сформулируйте понятия «модель» и «метод моделирования».

3. Каковы важнейшие особенности социально-экономических систем как объектов моделирования?

4. Дайте характеристику этапов экономико-математического моделирования.

5. Укажите основные научные дисциплины и методы, входящие в состав экономико-математических методов.

6. Назовите основные классификационные признаки экономико-математических моделей и приведите примеры моделей, входящих в ту или иную классификационную рубрику.

Словарь терминов

Экономическая система – система общественного производства и потребления материальных благ.

Экономико-математические методы – обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

Социально-экономическая система – сложная вероятностная динамическая система, охватывающая процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ.

Система – комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями между элементами и между их атрибутами.

Моделирование – конструирование модели на основе предварительного изучения объекта и выделения его существенных характеристик, ее экспериментальный или теоретический анализ, сопоставление результатов с данными об объекте.

Модель (от фр. modele, от лат. modulus – мера, образец) – один из важнейших инструментов научного познания, условный образ объекта исследования или управления.

Адекватность модели – соответствие модели моделируемому объекту или процессу.

2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Цели изучения

Задача представленного материала – ознакомиться с фундаментальными характеристиками линейного программирования, что определяет перечень следующих вопросов:

– теория двойственности;

– экономический смысл теорем двойственности;

– экономико-математическая модель транспортной задачи;

– задачи целочисленного программирования;
– сущность задач многокритериальной оптимизации.

Основные вопросы

Теория двойственности. Задачи линейного программирования. Модель двойственной задачи. Теоремы двойственности. Теорема об оценках.

Транспортная задача. Характеристика транспортной задачи. Алгоритм транспортной задачи. Закрытая транспортная задача.

Целочисленное программирование. Характеристика и область применения целочисленного программирования. Методы решения целочисленных задач. Метод Гомори.

Задачи многокритериальной оптимизации. Задачи векторной оптимизации. Оптимальность по Парето. Метод последовательных уступок.

Понятие об имитационном моделировании. Машинная имитация. Имитационная система. Внутреннее и внешнее математическое обеспечение. Циклы и этапы имитационного моделирования.

2.1. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В АНАЛИЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим одно из основных понятий линейного программирования – теорию двойственности.

Любую задачу линейного программирования можно записать следующим образом:

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j; \quad i = \overline{1,m} \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,n} \qquad (2.3)$$

С каждой задачей линейного программирования тесно связана задача, называемая **двойственной;** первоначальная задача называется **исходной,** или прямой.

Связь исходной и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Хорошо разработанный математический аппарат линейного программирования позволяет получать с помощью эффективных вычислительных процедур оптимальный план, делать экономически содержательные выводы.

Переменные двойственной задачи y_i называют **объективно обусловленными оценками**. Модель двойственной задачи имеет вид:

$$g(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j; \quad j = \overline{1,n} \tag{2.5}$$

$$y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m} \tag{2.6}$$

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач находится решение и другой задачи.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам.

1. Целевая функция исходной задачи (2.1-2.3) формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи (2.4-2.6) – на минимум; при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид ≤, а в задаче на минимум – вид ≥.

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (2.2) исходной задачи, и аналогичная матрица $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием.

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений (2.2) исходной задачи, а число ограничений в системе (2.5) двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (2.4) двойственной задачи являются свободные члены в системе (2.2) ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях (2.5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (2.1) исходной задачи.

5. Каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства $\le$, соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными.

В **несимметричных** двойственных задачах система ограничений исходной задачи задаётся в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.

В **симметричных** задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задаётся неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Итак, согласно теории линейного программирования каждой задачи линейного программирования (2.1-2.3) соответствует двойственная ей задача линейного программирования (2.4-2.6). Основные утверждения о взаимодвойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

Первая теорема двойственности. Для взаимодвойственных задач линейного программирования имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1) в прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают: $\max f(\bar{X}) = \min g(\bar{Y})$;
2) в прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество;
3) в двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу;
4) обе рассматриваемые задачи имеют пустые допустимые множества.

Экономический смысл первой теоремы двойственности следующий. План производства X и набор оценок ресурсов Y оказываются оптимальными тогда, когда прибыль от реализации продукции, определения при известных заранее ценах продукции $c_1, c_2, ..., c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам ресурсов: $y_1, y_2, ..., y_m$. Для всех же других планов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ обеих задач прибыль от продукции всегда меньше (или равна) стоимости затраченных ресурсов: $f(\bar{X}) \le g(\bar{Y})$, т.е. ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина $g(\bar{Y}) - f(\bar{X})$ характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

Из первой теоремы двойственности следует, что при оптимальной производственной программе и векторе оценок ресурсов производственные потери равны нулю.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану $\overline{X}$ и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам $\overline{Y}$ и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы.

Вторая теорема двойственности. Пусть $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – допустимое решение прямой задачи (2.1-2.3), а $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ – допустимое решение двойственной задачи (2.4-2.6). Для того чтобы они были оптимальными решениями соответствующих взаимодвойственных задач (2.1–2.3) и (2.4–2.6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0; \quad i = \overline{1,m} \qquad (2.7)$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j\right) = 0; \quad j = \overline{1,n} \qquad (2.8)$$

Условия (2.7-2.8) позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимодвойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Из второй теоремы двойственности следуют требования на оптимальную производственную программу $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и оптимальный вектор оценок $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$.

$$\text{если } y_i > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \; i = \overline{1,m};$$

$$\text{если } y_i > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \; i = \overline{1,m}; \qquad (2.9)$$

$$\text{если } x_j > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \; j = \overline{1,n}; \qquad (2.10)$$

если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, *то* $x_j = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Условия можно объяснить так:

– если оценка y_i единицы ресурса (i) положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью;
– если ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

Из условия (2.10) следует:

– если вид продукции (j) вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках не убыточен;
– если вид продукции (j) убыточен, то он не войдет в план, не будет выпускаться.

Кроме нахождения оптимального решения должно быть обеспеченно получение дополнительной информации о возможных изменениях решения при изменениях параметров системы. Эту часть исследования обычно называют анализом модели на чувствительность. Это необходимо в тех случаях, когда некоторые характеристики исследуемой системы не поддаются точной оценке.

Экономико-математический анализ решений осуществляется в двух основных направлениях:

– в виде вариантных расчетов по моделям с сопоставлением различных вариантов плана;
– в виде анализа каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

Одно из эффективных средств экономико-математического анализа – использование объективно обусловленных оценок оптимального плана. Такого рода анализ базируется на свойствах двойственных оценок. Однако экономическая интерпретация этих оценок может быть совершенно разной для различных задач.

2.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования. Однако существуют более эффективные вычислительные процедуры решения, основанные на специфике ограничений этих задач. Рассмотрим так называемую **транспортную задачу по критерию стоимости**, которую можно сформулировать следующим образом.

В m пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого определенного продукта, которое обозначим $a_i, i = 1,2,\ldots,m$. Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_m$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим $b_j,\ j = 1,2,\ldots,n$. Известны расходы на перевозку единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов.

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью, а общая величина транспортных издержек минимальна.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим $\overline{X}$, тогда целевая функция задачи будет иметь вид

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \qquad (2.11)$$

а ограничения будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i;\ j = \overline{1,n}; \qquad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i;\quad i = \overline{1,m};\quad x_{i,j} \geq 0. \qquad (2.13)$$

Условие (2.12) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления; условия (2.13) определяют полный вывоз продукции от всех поставщиков.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является *условие баланса*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (2.14)$$

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (2.14), называется *закрытой* и может быть решена как задача линейного программирования. Наиболее часто применяемым методом решения транспортной задачи является *метод потенциалов*, при котором каждой *i*-той строке (*i*-тому поставщику) устанавливается потенциал u_i, который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика, а каждому j (j-тому потребителю) устанавливается потенциал v_j, который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя.

В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

$$v_j = u_i + c_{ij}. \qquad (2.15)$$

Первым этапом этого алгоритма является составление начального распределения (начального плана перевозок); для реализации этого начального этапа имеется ряд методов: северо-западного угла, наименьших стоимостей, аппроксимаций Фогеля и др.

Вторым этапом служат построение систем потенциалов на основе равенства (2.15) и проверка начального плана на оптимальность; в случае его неоптимальности переходят к третьему этапу.

Третий этап – реализация так называемых циклов перераспределения, после чего переходят опять ко второму этапу. Совокупность процедур второго и третьего этапов образует одну итерацию; эти итерации повторяются до тех пор, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию (2.11).

Если баланс (2.14) не выполняется, то ограничения (2.12) или (2.13) имеют вид неравенств типа $\leq$; транспортная задача в таком случае называется *открытой*.

Транспортная задача, для которой выполняется соотношение (2.14), т.е. суммарные мощности поставщиков и суммарные потребности потребителей совпадают, называется *закрытой* транспортной задачей.

Иногда транспортная задача позволяет описать ситуацию, когда потребности могут удовлетворяться разными продуктами. Различают полную взаимозаменяемость, когда потребность каждого из потребителей с равным успехом может удовлетворяться за счет любого набора продуктов, и частичную взаимозаменяемость, когда отдельные потребители могут удовлетворять свои потребности только за счет определенных видов продуктов.

2.3. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Целочисленным (дискретным) программированием называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности, а область допустимых решений конечна. Необходимость изучения этого раздела вызывается тем, что огромное количество экономических задач носит целочисленный характер, что связано с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т.д. В большинстве случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным, с последующим округлением до целых чисел. Такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение.

Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить две группы:

– методы отсечения (отсекающих плоскостей);
– комбинаторные методы.

Метод отсекающих плоскостей состоит в построении дополнительных ограничений и применении двойственного симплексного метода. Представление о *комбинаторных методах* дает широко используемый на практике *метод ветвей и границ.*

Рассмотрим один из методов отсекающих плоскостей, известный как *метод Гомори*. Метод Гомори для линейных задач целочисленного программирования основан на понятии *конгруэнтности* действительных чисел. Любое действительное число можно представить в виде суммы его целой и дробной частей: $x = [x] + \{x\}$, где квадратные скобки означают целую часть, а фигурные – дробную. Например, $7.5 = [7.5] + \{7.5\} = 7 + 0.5$. Неотрицательные числа (для подробности будем рассматривать только их) называются *конгруэнтными*, если равны их дробные части. Если обозначать конгруэнтность чисел символом $\equiv$, то, например, $7.5 \equiv 0.5;\ 6.3 \equiv 2.3$. В частности, все целые числа конгруэнтны нулю, поэтому условие целочисленности переменной x_i можно записать $x_i \equiv 0$.

По методу Гомори первый этап решения целочисленных задач не отличается от обычного расчета по симплексному алгоритму.

Алгоритм Гомори позволяет перейти к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов.

К задачам целочисленного программирования приводят многие оптимальные задачи *теории расписаний,* в которой рассматриваются методы оптимизации оперативно-календарного планирования. В качестве примера таких задач можно привести задачу определения оптимальной очередности обработки изделий на различных станках или других рабочих местах, задачу составления программы «диспетчер» для управления работой ЭВМ в мультипрограммном режиме и др.

Отметим также, что задачи целочисленного программирования нередко встречаются в управлении производством и принятии решений.

Пример 1. Задача распределения ресурсов. Пусть способ (i) использования x_i единиц ресурса дает доход $f_i(x_i)$. Ресурс предполагается неделимым, т.е. переменные принимают целые неотрицательные значения. Нужно максимизировать доход.

Математическая модель данной задачи следующая:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = m, \quad x_i \in \{0,1,\ldots,m\}, \quad i = 1,\ldots,n .$$

Это пример задачи целочисленного программирования.

2.4. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности. Например, принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как выигрыш города в целом по экологии, проигрыш отдельных предприятий и фирм, например, из-за уменьшения проезжающих через город потенциальных покупателей, и многие другие. Если такого рода задачи решаются методами математического программирования, то говорят *о задачах многокритериальной оптимизации.*

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием (например, стоимость и надежность). Требуется найти точку области допустимых решений, которая минимизирует или максимизирует все такие критерии.

Если в задачах речь идет не о разнородных критериях некоторой системы, а о сопоставлении однородных критериев различных её подсистем (например, отрасли, группы населения и т.п.), то эти задачи называются *задачами векторной оптимизации.* Эти задачи могут носить как линейный, так и нелинейный характер.

Обозначим *i*-тый частный критерий через $z_i(\bar{X})$, где $\bar{X}$ – допустимое решение, область допустимых решений – через Q. Если учесть, что изменением знака функции всегда можно свести задачу минимизации к задаче максимизации, то коротко задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$$Z(\bar{X}) = \langle Z_1(\bar{X}), Z_2(\bar{X}), \ldots, Z_m(\bar{X}) \rangle; \tag{2.16}$$

$$\bar{X} \in Q. \tag{2.17}$$

Процесс решения многокритериальных задач связан с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними. Известен ряд методов решения задач многокритериальной оптимизации:

– оптимизация одного критерия, признанного наиболее важным, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;
– упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них;
– сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес.

В некоторых случаях приходится рассматривать так называемое «переговорное» множество *эффективных решений (оптимальных по Парето).*

Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, в которых оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, что другие не ухудшаются.

Определение. Вектор $\overline{X}^* \in Q$ называется эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (2.16), (2.17), если не существует такого вектора $\overline{X} \in Q$, что

$$Z_1(\overline{X}) \geq Z_i(\overline{X}^*),\ i = \overline{1,m}, \tag{2.18}$$

причем хотя бы для одного значения *i* имеет место строгое неравенство.

Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности, принято называть *областью Парето*, или *областью компромиссов*, а принадлежащие ей решения – *эффективными*, **оптимальными по Парето**.

В общем случае эффективные решения не эквивалентны друг другу, так что про два оптимальных по Парето решения нельзя сказать, какое из них лучше. Поэтому при решении многокритериальных задач необходимо дополнительное изучение эффективных решений. Для этого можно было бы сформулировать некоторый критерий и оптимизировать его на множестве эффективных решений. Однако при этом возникают значительные трудности в связи с тем, что, как правило, область компромиссов не является выпуклой и полученная задача в общем случае будет задачей невыпуклого программирования. Обычный подход заключается в стремлении «свернуть» частные критерии в один обобщенный скалярный критерий, оптимизация которого проводит к оптимальному решению задачи в целом. Формулировка подходящего оптимального критерия в зависимости от конкретных условий как раз и является основным вопросом, который изучается в многокритериальной оптимизации.

Рассмотрим один из таких методов решения многокритериальных задач – *метод последовательных уступок.*

Метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации применяется в случае, когда частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение Z_1^* первого по важности критерия в области допустимых решений путем решения однокритериальной задачи

$$Z_1(\overline{X}) \to \max, \quad \overline{X} \in Q.$$

Затем исходя из практических соображений и принятой точности назначается величина допустимого отклонения $\sigma_1 > 0$ (экономически оправданной уступки) критерия Z_1 и находится максимальное значение второго критерия Z_2^* при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки, т.е. решается задача:

$$Z_2(X) \to \max, \quad Z_1(X) \geq Z_1^* - \sigma_1, \quad \overline{X} \in Q.$$

Снова назначается величина уступки $\sigma_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия:

$$Z_3(\overline{X}) \to \max, \quad Z_1(\overline{X}) \geq Z_1^* - \sigma_1, \quad Z_2(\overline{X}) \geq Z_2^* - \sigma_2, \quad \overline{X} \in Q.$$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия Z_m при условии, что значение каждого из первых $m-1$ частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данному критерию. Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным. Следует заметить, что этот метод не всегда приводит к эффективному решению.

Пример 2. Для выпуска двух видов продукции используется три вида ресурсов. Известны матрица норм расхода A, цены Q на ресурсы, цены реализации P продукции и запасы B ресурсов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; Q = (1, 2, 3), \; P = (14, 10), \; B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Если планируется произвести x единиц продукции, то стоимость потребных ресурсов QAx, предполагаемая выручка Px, и тогда предполагаемая прибыль $w = Px - QAx$.

Желая добиться наибольшей выручки и величины прибыли, получаем следующую задачу оптимизации с двумя целевыми функциями:

$$Px \to \max, \ (P - QA)x \to \max, \ Ax = b, \ x \ge 0,$$

или в развернутой форме

$$z_1 = 14x_1 + 10x_2 \to \max,$$

$$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 20,$$

$$x_1 + x_2 \le 15,$$

$$3x_1 + x_2 \le 39.$$

2.5. ПОНЯТИЕ ОБ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Во всех рассмотренных выше оптимальных моделях так или иначе предполагалась возможность использования аналитических методов решения, однако для многих задач анализа и управления в экономике такой возможности не существует. Если изучаемые процессы имеют явно нелинейный характер и при этом осложнены разного рода вероятностными характеристиками, то о практически полезном аналитическом решении не может быть и речи. В этих случаях могут быть применены методы *машинной имитации,* т.е. методы экспериментального изучения социально-экономических систем с помощью ЭВМ. Машинная имитация применяется тогда, когда реальный экономический эксперимент по каким-либо причинам невозможен; имитация выступает в качестве замены реального эксперимента либо в качестве предварительного этапа, позволяющего принять более обоснованное решение о проведении такого эксперимента.

При машинной имитации формируется так называемая *имитационная система,* в которую входят имитационная модель, имитирующая исследуемый процесс, и набор алгоритмов и программ, предназначенных как для обеспечения диалога человека и ЭВМ (*внутреннее математическое обеспечение*), так и для решения задач типа ввода и вывода информации, формирования базы данных и т.д. (*внешнее математическое обеспечение*). Имитационная модель при этом сама является своего рода программой для ЭВМ. Практическое применение этой модели заключается в наблюдении за результатами весьма многовариантных расчетов по такой программе при различных задаваемых значениях вводимых экзогенных переменных. В процессе анализа этих результатов могут быть сделаны выводы о поведении системы без ее построения, если эта система только проектируется, без вмешательства в ее функционирование, если это действующая система, и без ее разрушения, если целью эксперимента является определение пределов воздействия на систему. Таким образом, могут быть достигнуты цели экономико-математического моделирования в тех случаях, когда аналитическое решение невозможно.

Процесс последовательной разработки имитационной модели начинается с создания простой модели, которая затем постепенно усложняется в соответствии с предъявляемыми решаемой проблемой требованиями. В каждом цикле имитационного моделирования можно выделить следующие этапы:

1) формулирование проблемы: описание исследуемой проблемы и определение целей исследования;
2) разработка модели: логико-математическое описание моделируемой системы в соответствии с формулировкой проблемы;
3) подготовка данных: идентификация, спецификация и сбор данных;
4) трансляция модели: перевод модели со специальных имитационных языков, используемых на этапе 2 (СИМУЛА, СЛАМ и др.), на язык, приемлемый для используемой ЭВМ;
5) верификация: установление правильности машинных программ;
6) верификация: оценка требуемой точности и адекватности имитационной модели;

7) планирование: определение условий проведения машинного эксперимента с имитационной моделью;
8) экспериментирование: многократный прогон имитационной модели на ЭВМ для получения требуемой информации;
9) анализ результатов: изучение результатов имитационного эксперимента для подготовки выводов и рекомендаций по решению проблемы;
10) реализация и документирование: реализация рекомендаций, полученных на основе имитации, и составление документации по модели и ее использованию.

Контрольные вопросы

1. Что такое двойственная задача в линейном программировании? Сформулируйте основные теоремы теории двойственности.
2. Поясните экономический смысл теорем двойственности, дайте экономическую интерпретацию свойств двойственных оценок.
3. Опишите экономико-математическую модель транспортной задачи. Какие методы решения транспортных задач вы знаете?
4. Дайте экономическую интерпретацию метода решения транспортной задачи.
5. Что такое задачи целочисленного программирования? Приведите примеры таких задач.
6. В чем состоит сущность задач многокритериальной оптимизации?
7. Раскройте основные понятия имитационного моделирования и перечислите этапы машинной имитации как экспериментального метода изучения национальной экономики.

Словарь терминов

Двойственность в линейном программировании – частный случай теории двойственности в применении к задачам линейного программирования.

Двойственность в математическом программировании – один из важнейших разделов теории математического программирования, в основе которого лежит возможность естественного сопоставления каждой задачи математического программирования с ограничениями с другой, тесно связанной с ней задачей, называемой двойственной.

Двойственные оценки (оптимальные оценки) – оценки оптимального плана, объективно обусловленные оценки. Основной инструмент, применяемый при исследовании решений оптимизационных экономико-математических моделей.

Двойственный симплексный метод – вычислительный алгоритм решения общей задачи линейного программирования, представляющий собой вариант симплексного метода, примененного к двойственной задаче линейного программирования.

Транспортная задача – одна из частных задач математического программирования, широко используемая при экономико-математическом моделировании распределения ресурсов, заданий на выпуск продукции и размещение производства.

Целочисленное программирование – раздел математического программирования, занимающийся исследованием задач, в которых на значения некоторых или всех переменных наложено требование целочисленности.

Многокритериальная оптимизация (векторная оптимизация) – направление в теории принятия решений, изучающее принятие решений по многим целевым функциям в планировании (проектировании).

Имитационная модель – экономико-математическая (преимущественно компьютерная) модель, исследование которой проводится экспериментальными методами.

Машинная имитация (имитационное моделирование) – метод познания экономической действительности в процессе конструирования имитационных моделей и проведения с ними лабораторных экономических экспериментов.

3. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Цели изучения

Ознакомиться с динамическими процессами, происходящими в экономических системах, которые проявляются в виде ряда последовательно расположенных в хронологическом порядке значений и в своих изменениях отражают ход развития изучаемого явления или процесса в экономике. Изучение раздела приведет к пониманию природы экономических рядов динамики, содержания методов сглаживания временных рядов; получению навыков расчета показателей развития экономических процессов на основе установления специфики тренд-сезонных экономических процессов.

Основные вопросы

Понятия экономических рядов динамики. Ряд динамики. Временной ряд. Длина временного ряда. Тренд. Трендовая модель. Сезонные колебания. Циклическая компонента.

Предварительный анализ и сглаживание временных рядов. Аномальный уровень. Метод Ирвина. Метод проверки разностей средних уровней. Критерий Фишера. Критерий Стьюдента. Метод Фостера-Стьюарта.

Расчет показателей динамики развития экономических процессов. Коэффициент роста. Коэффициент прироста. Темп прироста. Средний темп прироста.

Тренд-сезонные экономические процессы и их анализ. Сезонность. Сезонные колебания. Сглаживание и фильтрация временного ряда.

3.1. ПОНЯТИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИНАМИКИ

Последовательность наблюдений одного показателя (признака), упорядоченных в зависимости от последовательно возрастающих или убывающих значений другого показателя (признака), называют *динамическим рядом*, или *рядом динамики*. Если в качестве признака, в зависимости от которого происходит упорядочение, берется время, то такой динамический ряд называется *временным рядом*. Составными элементами рядов динамики являются цифровые значения показателя, называемые *уровнями* этих рядов, и моменты или интервалы времени, к которым относятся уровни. Временные ряды, образованные показателями, характеризующими экономическое явление на определенные моменты времени, называются *моментными*; пример такого ряда представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Списочная численность рабочих предприятия

Дата	1/I	1/II	1/III	1/IV
Списочная численность рабочих	4100	4400	4200	4600

Если уровни временного ряда образуются путем агрегирования за определенный промежуток (интервал) времени, то такие ряды называются *интервальными* временными рядами; пример приведен в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Фонд заработной платы рабочих предприятия

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель
Фонд заработной платы рабочих, тыс. руб.	37187,5	38270,0	39380,0	42535,0

Под *длиной* временного ряда понимают время, прошедшее от начального момента наблюдения до конечного. Исходя из этого длина всех приведенных выше временных рядов равна четырем месяцам.

Если во временном ряду появляется длительная («вековая») тенденция изменения экономического показателя, то говорят, что имеет место тренд. Под *трендом* понимается изменение, определяющее общее направление развития, основную тенденцию временных рядов. В связи с этим экономико-математическая динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей, называется *трендовой моделью*. Для выявления тренда во временных рядах, а также для построения и анализа трендовых моделей используется аппарат теории вероятностей и математической статистики, разработанный для простых статистических совокупностей.

Временной ряд, состоящий из *n* уровней, может быть представлен следующим образом:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n .$$

В самом общем случае временной ряд экономических показателей можно разложить на четыре структурно образующих элемента:

– тренд, составляющие которого будем обозначать $U_t,\ t = 1, 2, \dots, n$;
– сезонная компонента $V_t,\ t = 1, 2, \dots, n$;
– циклическая компонента $C_t,\ t = 1, 2, \dots, n$;
– случайная компонента $E_t,\ t = 1, 2, \dots, n$.

Во временных рядах экономических процессов могут иметь место регулярные колебания. Если они носят строго периодический или близкий к нему характер и завершаются в течение одного года, то их называют *сезонными колебаниями.* В тех случаях, когда период колебаний составляет несколько лет, говорят, что во временном ряде присутствует *циклическая компонента*.

Тренд, сезонная и циклическая компоненты называются *регулярными*, или систематическими компонентами временного ряда. Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него регулярных компонент, представляет собой *случайную*, нерегулярную компоненту. Она является обязательной составной частью любого временного ряда в экономике, так как случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому экономическому явлению. Если систематические компоненты временного ряда определены правильно, что является главной целью при разработке трендовых моделей, то остающаяся после выделения из временного ряда этих компонент так называемая *остаточная* *последовательность* будет случайной компонентой ряда, т.е. будет обладать следующими свойствами:

– случайностью колебаний;
– соответствием распределения случайной компоненты;
– равенством математического ожидания случайной компоненты нулю;
– независимостью значений уровней случайной последовательности.

Проверка адекватности трендовых моделей основана на установлении наличия у остаточной последовательности указанных четырех свойств. Если не выполняется хотя бы одно из них, модель признается неадекватной; при выполнении всех четырех свойств модель адекватна. Для моделирования и прогнозирования сезонных и циклических экономических процессов используются специальные методы (индексный и спектральный анализы, выравнивание по ряду Фурье и др.).

3.2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СГЛАЖИВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Предварительный анализ временных рядов экономических показателей заключается в выявлении и устранении аномальных значений уровней ряда, а также в определении наличия тренда в исходном временном ряде.

Под *аномальным уровнем* понимается отдельное значение уровня временного ряда, которое не отвечает потенциальным возможностям исследуемой экономической системы и которое оказывает существенное влияние на значения основных характеристик временного ряда, в том числе на соответствующую трендовую модель.

Причинами аномальных наблюдений могут быть *ошибки первого рода*: ошибки при агрегировании и дезагрегировании показателей, при передаче информации и другие технические причины. Ошибки первого рода подлежат выявлению и устранению.

Ошибки второго рода возникают из-за воздействия объективных факторов, они устранению не подлежат.

Для выявления аномальных уровней используют ряд методов.

Метод Ирвина. Предполагается использование следующей формулы:

$$\lambda_t = \left| \frac{y_t - y_{t-1}}{\sigma_y} \right|; \; t = 2,3...n, \tag{3.1}$$

где среднеквадратическое отклонение σ_y рассчитывается:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \bar{y}\right)^2}{n-1}}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}. \tag{3.2}$$

Расчётные значения $\lambda_t = \lambda_2, \lambda_3 ...$ сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина, и если оказываются больше табличных λ_α, то соответствующее значение уровня ряда считается аномальным. Значения критерия Ирвина приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Значения критерия Ирвина для уровня значимости

$\alpha = 0{,}05$

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

После выявления аномальных уровней ряда обязательно определение причин их возникновения.

Метод проверки разностей средних уровней. Реализация этого метода состоит из четырёх этапов.

На первом этапе исходный временной ряд $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ разбивается на две части: в первой части (n_1) первых уровней исходного ряда, во второй – (n_2) остальных уровней ($n = n_1 + n_2$).

На втором этапе для каждой их этих частей вычисляются средние значения и дисперсии:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}; \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n} y_t}{n_2}; \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_2 - 1}.$$

Третий этап заключается в проверке равенства (однородности) обеих частей ряда с помощью критерия Фишера, которая основана на сравнении расчетного значения этого критерия:

$$F = \begin{cases} \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \quad, \text{если } \sigma_1^2 > \sigma_2^2; \\ \sigma_2^2 / \sigma_2^2 \quad, \text{если } \sigma_1^2 < \sigma_2^2. \end{cases}$$

Если расчетное значение (F) меньше табличного (F^{α}), гипотеза о равенстве принимается, и переходят к четвертому этапу.

Если (F) больше или равно (F^{α}), гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется и делается вывод, что данный метод для определения наличия тренда ответа не дает.

На четвертом этапе проверяется гипотеза об отсутствии тренда с использованием ***t*-критерия Стьюдента**. Для этого определяется расчетное значение критерия Стьюдента по формуле:

$$t = \frac{\left|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Если расчетное значение (t) меньше табличного значения статистики Стьюдента (t^{α}) с заданным уровнем значимости α, гипотеза принимается, т.е. тренда нет; в противном случае тренд есть. Данный метод применим только для рядов с монотонной тенденцией.

Метод Фостера-Стьюарта. Метод обладает большими возможностями и дает более надежные результаты по сравнению с предыдущим. Он позволяет установить наличие тренда дисперсии временного ряда: если тренда дисперсии нет, то разброс уровней ряда постоянен; если дисперсия увеличивается, то ряд «раскачивается», и т.д. Реализация метода также содержит четыре этапа.

На первом этапе производится сравнение каждого уровня исходного временного ряда, начиная со второго уровня, со всеми предыдущими.

$$k_t = \begin{cases} 1, \textit{если } y_t \textit{ больше всех предыдущих уровней} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases};$$

$$l_t = \begin{cases} 1, \textit{если } y_t \textit{ меньше всех предыдущих уровней} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases};$$

$$t = 2, 3 \ldots n.$$

На втором этапе вычисляются величины (s) и (d):

$$s = \sum_{t=2}^{n} (k_t + l_t);$$

$$d = \sum_{t=2}^{n} (k_t - l_t).$$

Величина s характеризует изменение временного ряда, а величина d – изменение дисперсии уровней временного ряда.

Третий этап заключается в проверке гипотез.

На четвертом этапе расчетные значения сравниваются с табличными значениями критерия Стьюдента с заданным уровнем значимости. Если расчетное значение меньше табличного, то гипотеза об отсутствии соответствующего тренда принимается; в противном случае тренд есть.

Часто уровни экономических рядов динамики колеблются, при этом тенденция развития экономического явления во времени скрыта случайными отклонениями уровней в ту или иную сторону.

Чтобы более четко выявить тенденцию развития исследуемого процесса, в том числе для дальнейшего применения методов прогнозирования на основе трендовых моделей, производят *сглаживание (выравнивание)* временных рядов.

Методы сглаживания временных рядов делятся на две основные группы:

1) аналитическое выравнивание с использованием кривой, проведенной между конкретными уровнями ряда так, чтобы она

отображала тенденцию, присущую ряду, и одновременно освобождала его от незначительных колебаний;

2) механическое выравнивание отдельных уровней временного ряда с использованием фактических значений соседних уровней.

Механическое сглаживание заключается в следующем. Берется несколько первых уровней временного ряда, образующих *интервал сглаживания*. Для них подбирается полином, степень которого должна быть меньше числа уровней, входящих в интервал сглаживания; с помощью полинома определяются новые, выровненные значения уровней в середине интервала сглаживания. Далее интервал сглаживания сдвигается на один уровень ряда вправо, вычисляется следующее сглаженное значение и т.д.

К методам механического сглаживания относятся следующие:

– метод простой скользящей средней;
– метод взвешенной скользящей средней;
– метод экспоненциального сглаживания.

Метод простой скользящей средней является самым простым способом механического сглаживания.

Сначала для временного ряда $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ определяется интервал сглаживания m ($m < n$). Если необходимо сгладить мелкие беспорядочные колебания, то интервал сглаживания берут большим; интервал сглаживания уменьшают, если нужно сохранить более мелкие колебания. При прочих равных условиях интервал сглаживания рекомендуется брать нечетным. Для первых m уровней временного ряда вычисляется их средняя арифметическая; это будет сглаженное значение уровня ряда, находящегося в середине интервала сглаживания. Затем интервал сглаживания сдвигается на один уровень вправо, повторяется вычисление средней арифметической и т.д. Для вычисления сглаженных уровней ряда применяется формула:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum\limits_{t=t-p}^{t=p} y_t}{m},\ t > p,\ p = \frac{m-1}{2}\ (при\ \text{нечетном}\ m).$$

Недостаток метода состоит в том, что он применим лишь для рядов, имеющих линейную тенденцию.

Метод взвешенной скользящей средней отличается от предыдущего метода сглаживания тем, что уровни, входящие в интервал сглаживания, суммируются с разными весами. Это связано с тем, что аппроксимация ряда в пределах интервала сглаживания осуществляется с использованием полинома не первой степени, как в предыдущем случае, а начиная со второй. Используется формула средней арифметической взвешенной:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum\limits_{t=t-p}^{t=p} \rho_t y_t}{\sum\limits_{t=t-p}^{t=p} \rho_t},$$

причем веса ρ_t определяются с помощью метода наименьших квадратов. Эти веса рассчитаны для различных степеней аппроксимирующего полинома и различных интервалов сглаживания. Так, для полиномов второго и третьего порядков числовая последовательность весов при интервале сглаживания $m = 5$ имеет вид {– 3; 12; 17; 12; -3}, а при $m = 7$ – вид {-2; 3; 6; 7; 6; 3; -2}. Для полиномов четвертой и пятой степеней и при интервале сглаживания $m = 7$ последовательность весов выглядит следующим образом: {5; -30; 75; 131; 75; -30; 5}.

К этой же группе методов выравнивания временных рядов примыкает **метод экспоненциального сглаживания**. Его особенность заключается в том, что в процедуре нахождения сглаженного уровня используются значения только предшествующих уровней ряда, взятые с определенным весом, причем вес наблюдения уменьшается по мере удаления его от момента времени, для которого определяется сглаженное значение уровня ряда. Если для исходного временного ряда $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ соответствующие сглаженные значения уровней обозначить через S_t, $t = 1, 2 \ldots n$, то экспоненциальное сглаживание осуществляется по формуле

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1},$$

где α – *параметр сглаживания* (0 < α <1); величина $(1-\alpha)$ называется *коэффициентом дисконтирования.*

В практических задачах обработки экономических временных рядов рекомендуется (необоснованно) выбирать величину параметра сглаживания в интервале от 0,1 до 0,3. Других точных рекомендаций для выбора оптимальной величины параметра α пока нет.

3.3. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Этот расчет проводится на основе статистического анализа одномерных временных рядов экономической динамики. Для статистического анализа одномерных временных рядов экономических показателей вида $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ абсолютные уровни моментных и интервальных рядов, а также уровни из средних величин должны быть преобразованы в относительные величины. Их можно получить соотнесением уровней ряда с одним и тем же уровнем, взятым за базу, либо последовательными сопоставлениями с предыдущим уровнем. В первом случае получают *базисные* показатели, во втором – *цепные.*

Временной ряд правильно отражает объективный процесс развития экономического явления тогда, когда уровни этого ряда состоят из однородных, *сопоставимых* величин. Для несопоставимых величин вести расчет рассматриваемых ниже статистических показателей динамики неправомерно. Причины несопоставимости уровней временного ряда могут быть различными. В экономике чаще всего такими причинами является несопоставимость:

– территории в случае изменения границ региона, по которому собираются статистические данные;

– круга охватываемых объектов по подчинению или форме собственности ввиду перехода, например, части предприятий данного объединения в другое объединение;
– временных периодов, когда данные за различные годы приведены по состоянию на разные даты;
– уровней, вычисленных в различных масштабах измерения;
– уровней ряда из-за различий в структуре совокупности, для которой они вычислены. Например, данные о рождаемости населения зависят не только от изменений числа родившихся и численности населения, но и от изменения возрастного состава населения в течение периода наблюдения.

При анализе временных рядов для определения изменений, происходящих в данном явлении, прежде всего вычисляется скорость развития этого явления во времени. Показателем скорости служит *абсолютный прирост,* вычисляемый по формуле

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}, \tag{3.3}$$

где i – уровень временного ряда $i = 2, 3, \dots n$;

k – индекс; $k = 1, 2, \dots n-1$ определяет начальный уровень и может быть выбран любым в зависимости от целей исследования; так, если индекс равен 1, то получаются цепные показатели, а при $k = i-1$ получаются базисные показатели с начальным уровнем ряда в качестве базисного и т.д.

Абсолютный прирост выражает величину изменения показателя за интервал времени между сравниваемыми периодами. Если подходить более строго, то скоростью называют прирост в единицу времени; эта величина носит название *среднего абсолютного прироста:*

$$\overline{\Delta y}_i = (y_i - y_{i-k}) / k. \tag{3.4}$$

В частности, средний абсолютный прирост за весь период наблюдения для данного временного ряда характеризует среднюю скорость изменения временного ряда и равен

$$\overline{\Delta y} = (y_n - y_1)/(n-1). \qquad (3.5)$$

Для определения относительной скорости изменения изучаемого явления в единицу времени используют относительные показатели: коэффициенты роста и прироста (если эти показатели выражены в процентах, то их называют соответственно темпами роста и прироста). Заметим, что во всех последующих формулах индекс начального уровня, по отношению к которому осуществляется сопоставление, определяется точно так же с помощью индекса k, как и ранее для показателя абсолютного прироста.

Коэффициент роста для *i*-того периода вычисляется по формуле

$$K_{i(p)} = \frac{y_i}{y_{i-k}}. \qquad (3.6)$$

$K_{i(p)} > 1$, если уровень повышается; $K_{i(p)} < 1$, если уровень понижается; при $K_{i(p)} = 1$ уровень не меняется.

Коэффициент прироста равен

$$K_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \text{ или } K_{i(np)} = K_{i(p)} - 1. \qquad (3.7)$$

На практике чаще применяют показатели *темпа роста* $T_{i(np)}$ *и темпа прироста* $T_{i(p)}$*:*

$$T_{i(p)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100\%; \qquad (3.8)$$

$$T_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100\% \text{ или } T_{i(np)} = T_{i(p)} - 100\%. \qquad (3.9)$$

Темп прироста показывает, на сколько процентов уровень одного периода увеличился (уменьшился) по сравнению с уровнем другого периода, т.е. этот показатель выражает относительную величину прироста в процентах. Сравнение абсолютного прироста и темпа прироста за одни и те же промежутки времени показывает, что в реальных экономических процессах замедление темпа прироста часто не сопровождается уменьшением абсолютных приростов.

Абсолютное значение одного процента прироста определяется как отношение абсолютного прироста Δy_i к темпу прироста в процентах $T_{i(np)}$.

Важной характеристикой временного ряда является *средний уровень ряда*. В интервальном ряду динамики с равноотстоящими во времени уровнями расчет среднего уровня ряда производится по формуле простой средней арифметической

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n}. \tag{3.10}$$

Если интервальный ряд имеет неравноотстоящие во времени уровни, то средний уровень ряда вычисляется по формуле взвешенной арифметической средней, где роль весов играет продолжительность времени (например, количество лет), в течение которого уровень постоянен:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t t}{\sum t}, \tag{3.11}$$

где t – число периодов времени, при которых значение уровня y_t не изменяется.

При статистическом анализе временных рядов часто возникает необходимость, кроме определения основных характеристик ряда, оценить зависимость изучаемого показателя y_t от его значений, рассматриваемых с некоторым запаздыванием во времени. Зависимость значений уровней временного ряда от предыдущих (сдвиг на 1), предпредыдущих (сдвиг на 2) и так далее уровней того же временного ряда называется *автокорреляцией* во временном ряду. Для получения числовой характеристики такой внутренней зависимости вычисляют взаимную корреляционную функцию между исходным рядом y_t и этим же рядом, сдвинутым во времени на величину τ. Такая функция называется *автокорреляционной*, она характеризует внутреннюю структуру временного ряда и состоит из множества коэффициентов автокорреляции (нециклических).

График автокорреляционной функции называется *коррелограммом* и показывает величину запаздывания, с которым изменение показателя y_t сказывается на его последующих значениях. Величина сдвига τ, которому соответствует наибольший коэффициент автокорреляции, называется *временным лагом.*

3.4. ТРЕНД-СЕЗОННЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ АНАЛИЗ

Сезонность связывается исключительно со сменой природно-климатических условий в рамках ограниченного промежутка времени – годового периода. Наиболее ярко эта связь видна там, где исследуемые процессы прямо связаны с естественными особенностями того или иного времени года: в сельском хозяйстве, добывающих отраслях, отраслях легкой промышленности, обрабатывающих сельскохозяйственную продукцию, и др.

Однако сезонные колебания формируются не только под влиянием природно-климатических факторов, но и, пусть в меньшей мере, под влиянием иных особенностей хозяйственной системы, уходящих корнями в экономику.

Влияние сезонности на экономику вполне очевидно и проявляется в аритмии производственных и других процессов: недогрузка производственных мощностей в одни периоды года и более интенсивное их использование в другие; неравномерное распределение внутри рамок года объемов грузооборота и товарооборота и т.д. Не во всех случаях сезонность является следствием действия неуправляемых или почти неуправляемых факторов. Чаще всего они поддаются регулированию. Но даже и в тех случаях, когда прямое воздействие на процессы, вызывающие сезонные колебания, невозможно, необходимо учитывать их действие при совершенствовании технологических, организационно-экономических процессов и процессов управления. Для того чтобы можно было целенаправленно влиять на сезонность, необходимо уметь измерять и анализировать сезонность, уметь предвидеть развитие процессов, подверженных сезонным колебаниям.

Под *сезонными колебаниями* понимают регулярные, периодические наступления внутригодовых подъемов и спадов производства, грузооборота и товарооборота и т.д., связанных со сменой времени года, а под *сезонностью* – ограниченность годового периода работ под влиянием того же природного фактора.

Упорядоченная во времени последовательность наблюдений экономического процесса называется временным рядом, и если процесс подвержен периодическим колебаниям, имеющим определенный и постоянный период, равный годовому промежутку, то мы имеем дело с *тренд-сезонным* временным рядом (сезонным временным рядом).

Всюду, где не оговорено специально, будем рассматривать тренд-сезонный временной ряд ($\{Y_t\}$, $t = \overline{1,T}$), порождаемый аддитивным случайным процессом:

$$Y_t = U_t + V_t + \varepsilon_t, \tag{3.12}$$

где U_t – тренд;

V_t – сезонная компонента;

ε_t – случайная компонента;

T – число уровней наблюдения.

Относительно U_t предполагается, что это некоторая гладкая функция, степень гладкости которой заранее неизвестна. Сезонная компонента V_t имеет период $T_0 : V_{t+T_0} = V_t$.

Постараемся выделить и кратко охарактеризовать задачи, возникающие при исследовании сезонности вообще и сезонных временных рядов в частности. Проблема анализа сезонности заключается в исследовании собственно сезонных колебаний и в изучении того внешнего циклического механизма, который их вызывает. Для исследования сезонных колебаний вне связи с причинами, их порождающими, очевидно, необходимо отфильтровать из временного ряда $\{Y_t\}$ сезонную компоненту V_t и затем анализировать ее динамику. Большинство методов фильтрации построено таким образом, что предварительно выделяется тренд, а затем уже сезонная компонента. Тренд в чистом виде необходим для анализа динамики сезонной волны.

Перечислим задачи, которые возникают при исследовании сезонных временных рядов:

– определение наличия во временном ряду тренда и определение степени его гладкости;
– выявление наличия во временном ряду сезонных колебаний;
– фильтрация компонент ряда;
– анализ динамики сезонной волны;
– исследование факторов, определяющих сезонные колебания;
– прогнозирование тренд-сезонных процессов.

Объясним значение приведенных выше понятий. Под степенью гладкости тренда понимается минимальная степень полинома адекватно сглаживающего компоненту U_t.

Выявление наличия во временном ряду сезонных колебаний сводится к проверке на случайность остаточного ряда

$$\{l_t\},\ l_t = Y_t - U_t .$$

Под фильтрацией компонент ряда понимается выделение из ряда $\{Y_t\}$ его составляющих U_t, V_t, ε_t.

Анализ динамики, или эволюции, сезонной волны может рассматриваться как процесс решения трех взаимосвязанных задач:

– анализ динамики амплитуды сезонной волны в каждом месяце (квартале, неделе);
– анализ динамики точек экстремума сезонной волны;
– исследование изменений формы волны.

Укрупненная схема исследования сезонных временных рядов представлена следующей последовательностью:

1) определение степени гладкости тренда;
2) выявление наличия сезонных колебаний;

3) фильтрация компонент ряда;
4) анализ сезонности;
5) исследование факторов сезонности;
6) сглаживание ряда;
7) блок прогноза.

Схема не определяет методов решения каждой задачи, методы могут изменяться, совершенствоваться со временем, но она охватывает совокупность и последовательность вопросов, которые должны быть решены для полного исследования сезонного временного ряда.

В каких бы формах ни проявлялась сезонность, в любом случае ее действие отрицательно сказывается на результатах деятельности предприятия, фирмы, отрасли, экономики в целом. Управление сезонностью должно опираться на знание законов ее эволюции, на знание внешней среды, в которой происходит развитие процесса, подверженного сезонным колебаниям.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение временного экономического ряда и характеристику его структурообразующих элементов.
2. Перечислите основные этапы методов определения наличия тренда.
3. Поясните методы механического сглаживания временных рядов. Дайте сравнительную характеристику этих методов.
4. В чем заключается сущность явления автокорреляции во временных рядах?
5. Дайте характеристику явления сезонности в экономических процессах.
6. Что такое временной лаг?

Словарь терминов

Временной ряд (динамический ряд, ряд динамики, хронологический ряд) – ряд последовательных значений, характеризующих изменение показателя во времени.

Уровни временного ряда – составные элементы временного ряда, имеющие цифровые значения показателя.

Трендовые модели – модели, определяющие общее направление развития, основную тенденцию (тренд) временных рядов (рядов динамики).

Дисперсия – мера случайного рассеивания значений случайной величины от ее математического ожидания.

Сглаживание – выделение из временного ряда тенденций или тренда – плавно изменяющейся во времени неслучайной составляющей, связанной с постепенным изменением во времени механизма формирования временного ряда.

Средняя – среднее значение, числовая характеристика группы чисел или функций.

Интервал – промежуток.

Сглаживание – выделение из временного ряда тенденции, или тренда – плавно изменяющейся во времени неслучайной составляющей, связанной с постепенным изменением во времени механизма формирования временного ряда.

Аппроксимация – приближенное количественное описание какого-либо объекта, явления, процесса, менее точное, чем известное его описание, но более удобное для преследуемой конкретной цели (исследования, управления и т.п.).

Дисконтирование – учет неравноценности доходов (затрат), получаемых (производимых) в различные моменты времени.

Лаг – запаздывание, промежуток времени, отделяющий результат (эффект, реакцию) от обусловившего его воздействия (затрат, стимула).

Колебания – обладающие в той или иной степени повторяемостью во времени отклонения характеристик объекта от некоторых средних значений, соответствующих положению равновесия.

4. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Цели изучения

Основная задача представленного материала:

- получить представление о трендовых моделях на основе кривых роста;
- научиться оценивать адекватность и точность трендовых моделей и осуществлять прогнозирование экономической динамики на основе этих моделей;
- ознакомиться с основными понятиями теории адаптивных моделей прогнозирования.

Основные вопросы

Трендовые модели на основе кривых роста. Простейшие полиномиальные кривые роста. Использование экспоненциальных кривых роста. Кривая Гомперца. Характеристика метода конечных разностей. Метод характеристик прироста. Метод наименьших квадратов.

Оценка адекватности и точности трендовых моделей. Проверка случайности колебаний уровней остаточной последовательности. Проверка соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения. Проверка равенства математического ожидания случайной компоненты нулю. Проверка независимости значений уровней случайной компоненты.

Прогнозирование экономической динамики на основе трендовых моделей. Характеристика прогнозов. Определение верификации прогноза.

Адаптивные модели прогнозирования. Определение адаптивных моделей прогнозирования. Модель Брауна и ее характеристика. Этапы построения модели Брауна.

4.1. ТРЕНДОВЫЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ КРИВЫХ РОСТА

Трендовые модели служат базой для составления прогноза о развитии изучаемого процесса на предстоящий промежуток времени. Прогнозирование на основе временного ряда экономических показателей относится к одномерным методам прогнозирования, базирующимся на экстраполяции, т.е. на продлении на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом. При таком подходе предполагается, что прогнозируемый показатель формируется под воздействием большого количества факторов. В этом случае ход изменения показателя связывают не с факторами, а с течением времени, что проявляется в образовании одномерных временных рядов.

Использование метода экстраполяции на основе кривых роста для прогнозирования базируется на двух предположениях:

- временной ряд экономического показателя действительно имеет тренд, т.е. преобладающую тенденцию;
- общие условия, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений в течение периода упреждения.

В настоящее время насчитывается большое количество типов кривых роста для экономических процессов. Чтобы правильно подобрать наилучшую кривую роста для моделирования и прогнозирования экономического явления, необходимо знать особенности каждого вида кривых. Часто в экономике используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста. Простейшие **полиномиальные** кривые роста имеют вид:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \quad \text{(полином первой степени);}$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad \text{(полином второй степени);}$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \text{(полином третьей степени) и т.д.}$$

Параметр a_1 называют линейным приростом, параметр a_2 – ускорением роста, параметр a_3 – изменением ускорения роста.

Для полинома первой степени характерен постоянный закон роста. Если рассчитывать первые приросты по формуле

$$u_t = y_t + y_{t-1},\ t = 2, 3, \dots n\ ,$$

то они будут постоянной величиной и равны a_1.

Если первые приросты рассчитывать для полинома второй степени, то они будут иметь линейную зависимость от времени и ряд из первых приростов $u_2, u_3, \dots$ на графике будет представлен кривой линией. Вторые приросты

$$u_t^{(2)} = u_t + u_{t-1}$$

для полинома второй степени будут постоянны.

Для полинома третьей степени первые приросты будут полиномами второй степени, вторые приросты будут линейной функцией времени, а третьи приросты будут рассчитываться по формуле

$$u_t^{(3)} = u_t^{(2)} + u_{t-1}^{(2)}$$

и будут величиной постоянной.

На основе сказанного можно отметить следующие свойства полиномиальных кривых роста:

- от полинома высокого порядка можно путем расчета последовательных разностей (приростов) перейти к полиному более низкого порядка;
- значения приростов для полиномов любого порядка не зависят от значений самой функции $\hat{y}_t$.

Таким образом, полиномиальные кривые роста можно использовать для аппроксимации (приближения) и прогнозирования экономических процессов, в которых последующее развитие не зависит от достигнутого уровня.

В отличие от использования полиномиальных кривых использование экспоненциальных кривых роста предполагает, что дальнейшее развитие зависит от достигнутого уровня, например, прирост зависит от значения функции. В экономике чаще всего применяются две разновидности экспоненциальных (показательных) кривых: простая экспонента и модифицированная экспонента.

Простая экспонента представляется в виде функции

$$\hat{y}_t = ab^t, \qquad (4.1)$$

где a и b — положительные числа, при этом если b больше единицы, то функция возрастает с ростом времени t; если b меньше единицы — функция убывает.

Модифицированная экспонента имеет вид

$$\hat{y}_t = k + ab^t, \qquad (4.2)$$

где постоянные величины: a меньше нуля, b положительна и меньше единицы, а константа k носит название асимптоты этой функции, т.е. значения функции неограниченно приближаются (снизу) к величине k.

В экономике достаточно распространены процессы, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу. В качестве примера можно привести процесс ввода некоторого объекта в промышленную эксплуатацию, процесс изменения спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения, и др. Для моделирования таких процессов используются так называемые *S-образные кривые роста,* среди которых выделяют кривую Гомперца и логистическую кривую.

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение

$$\hat{y}_t = ka^{b^t}, \qquad (4.3)$$

где a, b – положительные параметры, причем b меньше единицы; параметр k – асимптота функции.

В кривой Гомперца выделяются четыре участка: на первом прирост функции незначителен, на втором прирост увеличивается, на третьем участке прирост примерно постоянен, на четвертом происходит замедление темпов прироста и функция неограниченно приближается к значению k. В результате конфигурация кривой напоминает латинскую букву *S*.

На основании кривой Гомперца описывается, например, динамика показателей уровня жизни; модификации этой кривой используются в демографии для моделирования показателей смертности и т.д.

Логистическая кривая, или кривая Перла-Рида – возрастающая функция, наиболее часто выражаемая в виде

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}; \tag{4.4}$$

другие виды этой кривой:

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + ab^{-t}}; \hat{y}_t = \frac{k}{1 + 10^{a-bt}}.$$

В этих выражениях a, b – *положительные* параметры; k – предельное значение функции при бесконечном возрастании времени.

Для выбора вида полиномиальной кривой роста наиболее распространенным методом является **метод конечных разностей** (метод Тинтнера). Этот метод может быть использован для предварительного выбора полиномиальной кривой, если, во-первых, уровни временного ряда состоят только из двух компонент: тренд и случайная компонента, и, во-вторых, тренд является достаточно гладким, чтобы его можно было аппроксимировать полиномом некоторой степени.

Более универсальным методом предварительного выбора кривых роста, позволяющим выбрать кривую из широкого класса кривых роста, является **метод характеристик прироста**. Он основан на использовании отдельных характерных свойств кривых. При этом методе исходный временной ряд предварительно сглаживается методом простой скользящей средней.

В соответствии с характером изменения средних приростов и производных показателей выбирается вид кривой роста для исходного временного ряда, при этом используется табл. 4.1.

Таблица 4.1

Показатель	Характер изменения	Вид кривой роста

	показателя во времени	
Первый средний прирост $\bar{u}_t$	Примерно одинаково	Полином первого порядка (прямая)
То же	Изменение линейно	Полином второго порядка (парабола)

Окончание табл. 4.1

Показатель	Характер изменения показателя во времени	Вид кривой роста
Второй средний $\bar{u}_t^{(2)}$ прирост	Изменение линейно	Полином третьего порядка
$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	Примерно одинаково	Простая экспонента
$\log \bar{u}_t$	Изменение линейно	Модифицированная экспонента
$\log \frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	Изменение линейно	Кривая Гомперца
$\log \frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^2}$	Изменение линейно	Логистическая кривая

Параметры полиномиальных кривых оцениваются, как правило, методом **наименьших квадратов**, суть которого заключается в том, чтобы сумма квадратов отклонений фактических уровней ряда от соответствующих выровненных по кривой роста значений была наименьшей. Этот метод приводит к системе так называемых нормальных уравнений для определения неизвестных параметров отобранных кривых.

При моделировании экономической динамики, заданной временным рядом, путём сглаживания исходного ряда, определения наличия тренда, отбора данной или нескольких кривых роста и определения их параметров в случае наличия тренда получают одну или несколько трендовых моделей для исходного временного ряда. На следующем этапе анализа выявляется, насколько эти модели близки к экономической реальности, отражённой во временном ряду, насколько обосновано применение этих моделей для анализа и прогнозирования изучаемого экономического явления.

4.2. ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ И ТОЧНОСТИ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Независимо от вида и способа построения экономико-математической модели вопрос о возможности ее применения в целях анализа и прогнозирования экономического явления может быть решен только после установления *адекватности,* т.е. соответствия модели исследуемому процессу или объекту. Полного соответствия модели реальному процессу или объекту быть не может, адекватность – в какой-то мере условное понятие. При моделировании имеется в виду адекватность не вообще, а по тем свойствам модели, которые читаются существенными для исследования.

Оценка 1. **Проверка случайности колебаний уровней остаточной последовательности** означает проверку гипотезы о правильности выбора вида тренда.

Оценка 2. **Проверка соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения** может быть произведена лишь приближенно с помощью исследования показателей *асимметрии* (γ_1) и *эксцесса* (γ_2), так как временные ряды, как правило, не очень велики.

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}};\sigma_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}};$$
$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^2} - 3;\sigma_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}. \qquad (4.5)$$

В этих формулах $\hat{\gamma}_1$ – выборочная характеристика асимметрии; $\hat{\gamma}_2$ – выборочная характеристика эксцесса; $\sigma_{\hat{y}_1}$ и $\sigma_{\hat{y}_2}$ – соответствующие среднеквадратические ошибки.

Оценка 3. **Проверка равенства математического ожидания случайной компоненты нулю,** если она распределена по нормальному закону, осуществляется на основе *t*-критерия Стьюдента. Расчетное значение этого критерия задается формулой

$$t = \frac{\bar{\varepsilon} - 0}{S_\varepsilon}\sqrt{n}, \qquad (4.6)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – среднее арифметическое значение уровней остаточной последовательности ε_t; S_ε – стандартное (среднеквадратическое) отклонение для этой последовательности.

Если расчетное значение t меньше табличного значения t_α статистики Стьюдента с заданным уровнем значимости α и числом степеней свободы $n-1$, то гипотеза о равенстве нулю математического ожидания случайной последовательности принимается; в противном случае эта гипотеза отвергается и модель считается неадекватной.

Оценка 4. **Проверка независимости значений уровня случайной компоненты,** т.е. проверка отсутствия существенной автокорреляции в остаточной последовательности может осуществляться по ряду критериев, наиболее распространенным из которых является *d*-критерий Дарвина – Уотсона. Расчетное значение этого критерия определяется по формуле

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}. \qquad (4.7)$$

Вывод об адекватности трендовой модели делается, если *все* указанные выше четыре проверки свойств остаточной последовательности дают положительный результат. Для адекватных моделей имеет смысл ставить задачу оценки их *точности.* Точность модели характеризуется величиной отклонения выхода модели от реального значения моделируемой переменной (экономического показателя). Для показателя, представленного временным рядом, точность определяется как разность между значением фактического уровня временного ряда и его оценкой, полученной расчетным путем с использованием модели, при этом в качестве статистических показателей точности применяются следующие:

– среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}\,; \qquad (4.8)$$

– средняя относительная ошибка аппроксимации

$$\bar{\varepsilon}_{отн} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| \cdot 100\%\,; \qquad (4.9)$$

– коэффициент сходимости

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}\,; \qquad (4.10)$$

– коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \varphi^2 \qquad (4.11)$$

и другие показатели.

В приведенных формулах n – количество уровней ряда; k – число определяемых параметров модели; $\hat{y}_t$ – оценка уровней ряда по модели; $\bar{y}$ – среднее арифметическое значение уровней ряда.

На основании указанных показателей можно сделать выбор из нескольких адекватных трендовых моделей экономической динамики наиболее точной, хотя может встретиться случай, когда по некоторому показателю более точна одна модель, а по другому – другая.

Для оценки прогнозных свойств модели целесообразно использовать так называемый ретроспективный прогноз – подход, основанный на выделении участка из ряда последних уровней исходного временного ряда в количестве, допустимом, n_2 уровней в качестве проверочного, а саму трендовую модель в этом случае следует строить по первым точкам, количество которых будет равно $n_1 = n - n_2$.

Тогда для расчета показателей точности модели по ретроспективному прогнозу применяются те же формулы, но суммирование в них будет вестись не по всем наблюдениям, а лишь по последним n_2 наблюдениям. Например, формула для среднего квадратического отклонения будет иметь вид:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n_2 - k}\sum_{t=n_1+1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}$$

где $\hat{y}_t$. — значения уровней ряда по модели, построенной для первых n_1 уровней.

Оценивание прогнозных свойств модели на ретроспективном участке весьма полезно, особенно при сопоставлении различных моделей прогнозирования из числа адекватных. Однако надо помнить, что оценки ретропрогноза – лишь приближенная мера точности прогноза и модели в целом, так как прогноз на период упреждения делается по модели, построенной по всем уровням ряда.

4.3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Прогнозирование экономических показателей на основе трендовых моделей основано на идее экстраполяции. Под экстраполяцией понимают распространение закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы. В более широком смысле слова ее рассматривают как получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему. В процессе построения прогнозных моделей в их структуру иногда закладываются элементы будущего предполагаемого состояния объекта или явления, но в целом эти модели отражают закономерности, наблюдаемые в прошлом и настоящем, поэтому достоверный прогноз возможен лишь относительно таких объектов и явлений, которые в значительной степени детерминируются прошлым и настоящим.

Существуют две основные формы детерминации: внутренняя и внешняя. Внутренняя детерминация, или самодетерминация, более устойчива, ее проще идентифицировать с использованием экономико-математических моделей. Внешняя детерминация определяется большим числом факторов, поэтому учесть их все практически невозможно.

При экстраполяционном прогнозировании экономической динамики на основе временных рядов с использованием трендовых моделей выполняются следующие основные этапы:

1) предварительный анализ данных;

2) формирование набора моделей (например, набора кривых роста), называемых функциями-кандидатами;

3) численное оценивание параметров моделей;

4) определение адекватности моделей;

5) оценка точности адекватных моделей;

6) выбор лучшей модели;

7) получение точечного и интервального прогнозов;

8) верификация прогноза.

Рассмотрим более подробно два заключительных этапа.

Прогноз на основании трендовых моделей (кривых роста) содержит два элемента: точечный и интервальный прогнозы. *Точечный прогноз* – это прогноз, который осуществляется по единственному значению прогнозируемого показателя. Это значение определяется подстановкой в уравнение выбранной кривой роста величины времени t, соответствующей периоду упреждения: $t = n + 1$; $t = n + 2$ и т.д. Такой прогноз называется точечным, так как на графике его можно изобразить в виде точки.

Очевидно, что точное совпадение фактических данных в будущем и прогностических точечных оценок маловероятно. Поэтому точечный прогноз должен сопровождаться двусторонними границами, т.е. указанием интервала значений, в котором с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется *интервальным прогнозом.*

Интервальный прогноз на базе трендовых моделей осуществляется путем расчета *доверительного интервала,* в котором с определенной вероятностью можно ожидать появления фактического значения прогнозируемого экономического показателя. Расчет доверительных интервалов при прогнозировании с использованием кривых роста опирается на выводы и формулы теории регрессий.

Методы, разработанные для статистических совокупностей, позволяют определить доверительный интервал, зависящий от стандартной ошибки оценки прогнозируемого показателя, от времени упреждения прогноза, от количества уравнений во временном ряду и от уровня значимости (ошибки) прогноза.

Стандартная (средняя квадратическая) ошибка оценки прогнозируемого показателя определяется по формуле

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - k}}, \qquad (4.12)$$

где y_t – фактическое значение уровня временного ряда для времени *t;*

$\hat{y}_t$ – расчетная оценка соответствующего показателя по модели (например, по уравнению кривой роста);

n – количество уровней в исходном ряду;

k – число параметров модели.

При экстраполяционном прогнозировании экономической динамики с использованием трендовых моделей весьма важным является заключительный этап – **верификация прогноза.** Верификация сводится к сопоставлению расчетных результатов по модели с соответствующими данными действительности – массовыми фактами и закономерностями экономического развития. Верификация прогнозной модели представляет собой совокупность критериев, способов, процедур, позволяющих на основе многостороннего анализа оценивать качество получаемого прогноза. Однако чаще всего на этапе верификации в большей степени осуществляется оценка метода прогнозирования, с помощью которого был получен результат, чем оценка качества самого результата. Это связано с тем, что до сих пор не найдено эффективного подхода к оценке качества прогноза до его реализации.

Даже в тех случаях, когда прогноз не оправдался, нельзя категорически утверждать, что он был бесполезен, поскольку пользователь может использовать прогнозную информацию желаемым для себя образом. Так, получив прогноз событий, определяющих нежелательное направление перспективного развития, пользователь может принять меры, чтобы прогноз не оправдался; такой прогноз называется *самодеструктивным.* Если прогноз предсказал ход событий, устраивающий пользователя, то он может использовать свои возможности для увеличения вероятности правильного прогноза; подобный прогноз называется *саморегулирующим.* Таким образом, показателем ценности прогноза является не только его достоверность для пользователей.

О точности прогноза принято судить по величине ошибки прогноза – разности между фактическим значением исследуемого показателя и его прогнозным значением. Очевидно, что определить указанную разность можно лишь в двух случаях: либо если период упреждения уже окончился и известно фактическое значение прогнозируемого показателя (известна его реализация), либо если прогнозирование осуществлялось для некоторого момента времени в прошлом, для которого известны фактические данные.

Во втором из названных случаев информация делится на две части. Часть, охватывающая более ранние данные, служит для оценивания параметров прогностической кривой роста; другая, более поздняя, рассматривается как реализация прогноза. Полученные таким образом ошибки прогноза в какой-то мере характеризуют точность применяемой методики прогнозирования.

Проверка точности одного прогноза недостаточна для оценки качества прогнозирования, так как она может быть результатом случайного совпадения. Наиболее простой мерой качества прогнозов при условии, что имеются данные об их реализации, является отношение числа случаев, когда фактическая реализация охватывалась интервальным прогнозом, к общему числу прогнозов. Данную меру качества прогнозов k можно вычислить по формуле

$$k = \frac{p}{p+q},$$

где p – число прогнозов, подтвержденных фактическими данными;

q – число прогнозов, не подтвержденных фактическими данными.

Однако в практической работе проблему качества прогнозов чаще приходится решать, когда период упреждения еще не закончился и фактическое значение прогнозируемого показателя неизвестно. В этом случае более точной считается модель, дающая более узкие доверительные интервалы прогноза. На практике не всегда удается сразу построить достаточно хорошую модель прогнозирования, этапы построения трендовых моделей экономической динамики выполняются неоднократно.

4.4. АДАПТИВНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Как уже выше отмечено, в основе экстраполяционных методов прогнозирования лежит предположение о том, что основные факторы и тенденции, имевшие место в прошлом, сохраняются в будущем. Сохранение этих тенденций – непременное условие успешного прогнозирования. При этом необходимо, чтобы учитывались лишь те тенденции, которые еще не устарели и до сих пор оказывают влияние на изучаемый процесс.

При краткосрочном прогнозировании, а также при прогнозировании в ситуации изменения внешних условий, когда наиболее важными являются последние реализации исследуемого процесса, наиболее эффективными оказываются адаптивные методы, учитывающие неравноценность уровней временного ряда.

Адаптивные модели прогнозирования – это модели дисконтирования данных, способные быстро приспосабливать свою структуру и параметры к изменению условий. Инструментом прогноза в адаптивных моделях, как и в кривых роста, является математическая модель с единственным фактором «время».

В практике статистического прогнозирования наиболее часто используются две базовые СС-модели – Брауна и Хольта; первая из них является частным случаем второй.

Модель Брауна (модель экспоненциального сглаживания). Модель Брауна может отображать развитие в виде случайного процесса, не имеющего тенденции, а также в виде изменяющейся параболической тенденции. Соответственно различают следующие модели Брауна:

– *модель нулевого порядка,* которая описывает процессы, не имеющие тенденции развития. Она имеет один параметр A_0 (оценка текущего уровня). Прогноз развития на k шагов вперед осуществляется согласно формуле

$$Y(t+k) = A_0 .$$

Такая модель также называется «наивной» («будет как было»);

– *модель первого порядка*

$$\left(Y(t+k) = A_0 + A_1^* k\right).$$

Коэффициент A_0 – значение, близкое к последнему уровню; представляет закономерную составляющую этого уровня. Коэффициент A_1 определяет прирост, сформировавшийся в основном к концу периода наблюдений, но отражающий скорость роста на более ранних этапах;

– *модель второго порядка, отражающая* развитие в виде параболической тенденции с изменяющимися «скоростью» и «ускорением». Она имеет три параметра (A_2 – оценка текущего прироста, или «ускорение»). Прогноз осуществляется по формуле

$$\left(Y(t+k)=A_0+A_1k+A_2k^2\right).$$

В моделях Брауна параметры сглаживания характеризуют степень адаптации модели к изменению ряда наблюдений. Они определяют скорость реакции модели на изменения, происходящие в развитии. Чем они больше, тем быстрее реагирует модель на изменения. Обычно для устойчивых рядов их величина большая, а для неустойчивых – маленькая. В различных методах прогнозирования используется различный подход к их определению.

Модели и методы авторегрессии. В авторегрессионных (АР) моделях текущее значение процесса представляется как линейная комбинация предыдущих его значений и случайной компоненты.

Одной из предпосылок построения модели этого типа является применение ее к стационарному процессу. Поэтому в более широком смысле идентификация модели включает также выбор способа трансформации исходного ряда наблюдений, как правило, имеющего некоторую тенденцию, в стационарный (или близкий к нему) ряд. Один из наиболее распространенных способов решения этой проблемы – последовательное взятие разностей, т.е. переход от исходного ряда к ряду первых, а затем и вторых разностей.

Ряды без тенденции, как правило, не представляют интереса для экономистов. АР-модели вообще не предназначены для описания процессов с тенденцией, однако они хорошо описывают колебания, что весьма важно для отображения развития неустойчивых показателей.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность прогнозирования экономических процессов на основе метода экстраполяции?

2. Укажите методы предварительного выбора кривой роста.

3. Дайте характеристику основных типов кривых роста, наиболее часто используемых при построении трендовых моделей прогнозирования.

4. Какие статистические критерии используются при оценке адекватности трендовых моделей?

5. Назовите статистические критерии оценки точности моделей прогнозирования в экономике.

6. Поясните суть адаптивных методов прогнозирования. Какие типы адаптивных моделей вы знаете?

Словарь терминов

Трендовые модели – модели, определяющие общее направление развития, основную тенденцию (тренд) временных рядов (рядов динамики).

Экстраполяция – распространение (возможно, с преобразованиями, осуществляемыми посредством формальных методов) количественных характеристик каких-либо объектов или процессов, наблюдаемых в определенных временных, пространственных либо других границах для той или иной цели, за эти границы и/или для другой цели; формально – продление функции за границы областей ее определения.

Аппроксимация – приближенное количественное описание какого-либо объекта, явления, процесса, менее точное, чем известное его описание, но более удобное для преследуемой конкретной цели (исследования, управления и т.п.)

5. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Цели изучения

Основная задача представленного материала:

- ознакомиться с балансовым методом и принципиальной схемой межпродуктового баланса;
- получить представление об экономико-математической модели межотраслевого баланса;

– показать роль межотраслевых балансовых моделей в анализе экономических показателей;
– ознакомиться с коэффициентами прямых и полных материальных затрат;
– выявить экономический смысл динамической межотраслевой балансовой модели.

Основные вопросы

Балансовый метод. Общее понятие, продукт, ресурс, балансовая модель. Характеристика технологической матрицы.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса. Определение коэффициентов прямых материальных затрат. Модель Леонтьева. Модель «затраты – выпуск». Определение коэффициентов полных материальных затрат.

Коэффициенты прямых и полных материальных затрат. Основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат.

Межотраслевые балансовые модели в анализе экономических показателей. Коэффициент прямой трудоемкости. Понятие полных затрат труда. Коэффициент полной трудоемкости. Коэффициенты прямой фондоемкости.

Динамическая межотраслевая балансовая модель. Статистические балансовые модели. Отличие динамических балансовых моделей. Коэффициенты вложений или приростной фондоемкости. Временные лаги. Динамическая модель Неймана или магистральная теория.

5.1. БАЛАНСОВЫЙ МЕТОД. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА

Балансовые модели, как статистические, так и динамические, применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Под *балансовой моделью* понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. При таком подходе рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт; часть его потребляется другими объектами системы, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного продукта. Если вместо понятия «продукт» ввести более общее понятие *ресурс*, то *под балансовой моделью* следует понимать систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Кроме приведенного выше требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д.

Важнейшие виды балансовых моделей:

– частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;
– межотраслевые балансы;
– матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Балансовый метод и создаваемые на его основе балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в народном хозяйстве. Балансовые модели на базе отчетных балансов характеризуют сложившиеся пропорции, в них ресурсная часть всегда равна расходной. Для выявления диспропорций используются балансовые модели, в которых фактические ресурсы сопоставляются не с их фактическим потреблением, а с потребностью в них. В связи с этим необходимо отметить, что балансовые модели не содержат какого-либо механизма сравнения отдельных вариантов экономических решений и не предусматривают взаимозаменяемости разных ресурсов, что не позволяет сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы. Этим определяется ограниченность балансовых моделей и балансового метода в целом.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. В модели межотраслевого баланса такую роль играет технологическая матрица – таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. Исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель должна быть очень тщательной. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др. В этих условиях понятия «межпродуктовый баланс» и «межотраслевой баланс» практически идентичны, отличие заключается лишь в единицах измерения элементов баланса.

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц – прямоугольных таблиц чисел. Балансовые модели относятся к тому типу экономико-математических моделей, которые называются матричными. В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение. Матричную структуру имеют межотраслевой и межрайонный баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве, модели развития отраслей, межотраслевые балансы производства и распределения продукции отдельных регионов, модели промфинпланов предприятий и фирм. Несмотря на специфику этих моделей, их объединяет не только общий формальный (матричный) принцип построения и единство системы расчетов, но и аналогичность ряда экономических характеристик.

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении приведена в табл. 5.1. В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт; все народное хозяйство представлено в виде совокупности *n* отраслей, при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

В схеме МОБ выделяют четыре части, имеющие различное экономическое содержание; они называются квадрантами баланса и на схеме обозначены римскими цифрами.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где i и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой матрицу порядка *n*, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в сферу конечного использования (на потребление и накопление). В табл. 5.1 этот раздел дан укрупненно в виде одного столбца величин Y_i; в развернутой схеме баланса проставляется конечный продукт каждой отрасли. Второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру накопления и потребления по отраслям производства и потребителям.

Таблица 5.1

Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Отрасли	Потребляющие – j					Конечный продукт	Валовой продукт
Производящие – i	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
.	.	.	.	…	.	.	.
.	.	.	.	**I**	.	**II**	.
.	.	.	.	…	.	.	.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	**III**	v_n	**IV**	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации (c_j) и чистой продукции $(v_j + m_j)$ некоторой *j*-той отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем (Z_j).

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются доходы населения, предприятий, государства.

Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирование капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей.

В целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый баланс доходов и расходов населения. Валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов, так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса.

5.2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Основу информационного обеспечения модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели межотраслевого баланса. Для производства единицы продукции в отрасли (j) требуется определенное количество затрат промежуточной продукции отрасли (i), равное a_{ij}. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \quad ij = \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Определение 1. Коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции отрасли (i) необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции отрасли (j):

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.2}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$, то вектор-столбец валовой продукции (X) и вектор-столбец конечной продукции (Y):

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (5.2) в матричной форме примет вид

$$X = AX + Y. \tag{5.3}$$

Система уравнений (5.2) или в матричной форме (5.3) называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью «затраты – выпуск»);* с помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

1) задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y):

$$Y = (E - A)X; \tag{5.4}$$

2) задав величины конечной продукции всех отраслей (Y), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X):

$$X = (E - A)^{-1} Y; \tag{5.5}$$

3) для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой

продукции вторых; в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (5.3), а системой линейных уравнений (5.2).

В формулах (5.4) и (5.5) (E) обозначает единичную матрицу n-го порядка, а $(E-A)^{-1}$ обозначает матрицу, обратную к матрице $(E-A)$. Если определитель матрицы $(E-A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через $B=(E-A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (5.5) можно записать в виде

$$X = BY. \tag{5.6}$$

Элементы матрицы (B) будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения (5.6) для любой (i) отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i=\overline{1,n}. \tag{5.7}$$

Из соотношений (5.7) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции отрасли (i) для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции отрасли (j). В отличие от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2. Коэффициент полных материальных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции отрасли (i) нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции отрасли (j).

Коэффициенты полных материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \qquad (5.8)$$

где ΔX_i, ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

5.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЯМЫХ И ПОЛНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАТРАТ

Рассмотрим основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица $A = (a_{ij})$ в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элементы матрицы A меньше единицы: $a_{ij} < 1$.

Система уравнений межотраслевого баланса является отражением реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков; таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонентов и называется неотрицательным: $X \geq 0$. Встает вопрос: при каких условиях экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям?

Будем называть неотрицательную матрицу *A продуктивной,* если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \qquad (5.9)$$

Условие (5.9) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (5.3).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$;

3) наибольшее по модулю собственное значение λ матрицы A, то есть решение характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$, строго меньше единицы;

4) все главные миноры матрицы $(E - A)$, т.е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы порядка от 1 до n, положительны.

Перейдем к анализу матрицы коэффициентов полных материальных затрат, т.е. матрицы $B = (E - A)^{-1}$. Согласно определению 2, коэффициент этой матрицы показывает, сколько всего нужно произвести продукции i-той отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-той отрасли. Дадим другое определение коэффициента полных материальных затрат исходя из того, что кроме прямых затрат существуют косвенные затраты той или иной продукции при производстве продукции данной отрасли. Рассмотрим в качестве примера формирование затрат электроэнергии на выпуск стального проката, при этом ограничимся технологической цепочкой «руда – чугун – сталь – прокат». Затраты электроэнергии при получении проката из стали будут называться прямыми затратами, те же затраты при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами 1-го порядка, а затраты электроэнергии при получении чугуна из руды будут называться косвенными затратами электроэнергии на выпуск стального проката 2-го порядка и т.д. В связи со сказанным выше имеет место следующее определение.

Определение 3. Коэффициентом полных материальных затрат c_{ij} называется сумма прямых затрат и косвенных затрат продукции *i*-той отрасли для производства единицы продукции *j*-той отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства. Если коэффициент косвенных материальных затрат *k*-того порядка обозначить через $a_{ij}^{(k)}$, то имеет место формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \tag{5.10}$$

а если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов полных материальных затрат $C = (c_{ij})$ и матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат различных порядков $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, то поэлементную формулу (5.10) можно записать в более общем матричном виде:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots. \tag{5.11}$$

Исходя из содержательного смысла коэффициентов косвенных материальных затрат можно записать ряд матричных соотношений:

$$A^{(1)} = AA + A^2; A^{(2)} = AA^{(1)} + AA^2 = A^3;$$

$$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1},$$

с использованием которых матричная формула (5.11) может быть переписана в следующем виде:

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k+1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \tag{5.12}$$

Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат *A* является продуктивной, то из условия (5.12) существует матрица $B = (E - A)^{-1}$, являющаяся суммой сходящегося матричного ряда:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{5.13}$$

Из сопоставления соотношений (5.12) и (5.13) устанавливается следующая связь между двумя матрицами коэффициентов полных материальных затрат:

$$B = E + C.$$

Данная связь определяет экономический смысл различия между коэффициентами матриц *B* и *C*: в отличие от коэффициентов матрицы *C*, учитывающих только затраты на производство продукции, коэффициенты матрицы *B* включают в себя кроме затрат также саму единицу конечной продукции, которая формируется вне сферы производства.

5.4. МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ В АНАЛИЗЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Различные модификации модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве позволяют расширить круг показателей, охватываемых моделью. Рассмотрим применение межотраслевого балансового метода для анализа таких важных экономических показателей, как труд, фонды и цены.

К числу важнейших аналитических возможностей данного метода относится определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей, исходной моделью при этом служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В этом балансе по строкам представлено распределение каждого отдельного продукта на производство других продуктов и конечное потребление (первый и второй квадранты схемы межотраслевого баланса). Отдельной строкой дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции; предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Обозначим затраты живого труда в производстве *j*-того продукта через L_j, а объём производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через X_j. Тогда прямые затраты труда продукции (*коэффициент прямой трудоемкости*) можно задать следующей формулой:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.14}$$

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j-того вида через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_i$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j-того продукта через i-тое средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j-того вида продукции (*коэффициент полной трудоемкости*) будут равны

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}T_i + t_j; \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.15}$$

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоёмкости $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $T = (T_1, T_2, ..., T_n)$.

С использованием матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A (в натуральном выражении) систему уравнений (5.15) можно переписать в матричном виде:

$$T = TA + t. \tag{5.16}$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы E

$$T - TA = TE - TA = T(E - A) = t,$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1}. \tag{5.17}$$

Матрица $(A - E)$ – это матрица B коэффициентов полных материальных затрат, так что последнее равенство можно переписать в виде

$$T = tB. \quad (5.18)$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (5.14) будет равна:

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} t_j X_j = tX. \quad (5.19)$$

Используя соотношения (5.19), (5.6) и (5.18), приходим к следующему равенству:

$$tX = TY, \quad (5.20)$$

где t и T – вектор-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости;

X и Y – вектор-столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (5.20) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда.

Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. С помощью показателей полной трудоемкости более полно и точно, чем при использовании существующих стоимостных показателей, выявляется структура затрат на выпуск различных видов продукции, и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условная чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерениях.

Развитие основной модели межотраслевого баланса достигается также путем включения в нее показателей фондоёмкости продукции. В простейшем случае модель дополняется отдельной строкой, в которой указаны в стоимостном выражении объемы производственных фондов Φ_j, занятые в каждой *j*-той отрасли. На основании этих данных и объемов валовой продукции всех отраслей определяются *коэффициенты прямой фондоемкости* продукции *j*-той отрасли:

$$f_i = \frac{\Phi_j}{X_j}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.21}$$

Коэффициент прямой фондоемкости показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве данной отрасли, в расчете на единицу ее валовой продукции. В отличие от этого показателя коэффициент полной фондоемкости F_j отражает объем фондов, необходимых во всех отраслях для выпуска единицы конечной продукции *j*-той отрасли. Если a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат, то для коэффициента полной фондоемкости справедливо равенство, аналогичное равенству (5.20) для коэффициента полной трудоемкости:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_j + f_j; \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.22}$$

Если ввести в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой фондоемкости $f = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной фондоемкости $F = (F_1, F_2, \ldots F_n)$, то систему уравнений (5.22) можно переписать в матричной форме:

$$F = FA + f, \tag{5.23}$$

откуда с помощью преобразований, аналогичных применяемым выше для коэффициентов трудоемкости, можно получить матричное соотношение

$$F = fB, \tag{5.23, а}$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Для более глубокого анализа необходимо дифференцировать фонды на основные и оборотные, а в пределах основных – на здания, сооружения, производственное оборудование, транспортные средства и т.д.

Пусть в целом все производственные фонды разделены на *m* групп. Тогда характеристика занятых в народном хозяйстве фондов задается матрицей показателей Φ_{kj}, отражающих объем фондов *k*-той группы, занятых в *j*-той отрасли:

$$\left(\Phi_{kj}\right) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi\,21 & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{m1} & \Phi_{m2} & \dots & \Phi_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты прямой фондоемкости также образуют матрицу размерности $m \times n$, элементы которой определяют величину производственных фондов группы *k*, непосредственно используемых при производстве единицы продукции отрасли j:

$$f_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{X_j}.$$

Для каждой отрасли j могут быть вычислены коэффициенты полной фондоемкости F_{kj}, отражающие полную потребность в фондах группы k для выпуска единицы конечной продукции этой отрасли:

$$F_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_{ki} + f_{kj}; \quad k = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}.$$

Решение систем данных уравнений позволяет представить коэффициенты полной фондоемкости для каждой из *m* групп фондов как функцию коэффициентов прямой фондоемкости:

$$F_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_{ki}; \quad k = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}.$$

В этих формулах величины a_{ij} и b_{ij} – уже известные коэффициенты прямых и полных материальных затрат.

Коэффициенты фондоемкости в межотраслевом балансе позволяют увязать планируемый выпуск продукции с имеющимися производственными мощностями. Так, потребность в функционирующих фондах группы k для достижения заданного объёма материального производства X_j по всем отраслям задается формулой

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} f_{lj} X_j; \quad k = \overline{1, m}.$$

5.5. ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕЖОТРАСЛЕВАЯ БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотренные выше межотраслевые балансовые модели являются *статическими*, т.е. такими, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени. Эти модели могут разрабатываться лишь для отдельно взятых периодов, причем в рамках данных моделей не устанавливается связь с предшествующими или последующими периодами. Народнохозяйственная динамика отображается рядом независимо рассчитанных моделей, что вносит определенные упрощения и сужает возможности анализа. К числу таких упрощений следует отнести то, что в схематических отраслевых моделях не анализируются распределение, использование и производственная эффективность капитальных вложений. Капиталовложения вынесены из сферы производства в сферу конечного использования вместе с предметами потребления и непроизводственными затратами, т.е. включены в конечный продукт.

В отличие от статистических, *динамические* модели призваны отразить не состояние, а процесс развития экономики, установить непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития и тем самым приблизить анализ на основе экономико-математической модели к реальным условиям развития экономической системы.

В основе построения модели в виде динамической системы уравнений лежит математическая зависимость между величиной капитальных вложений и приростом продукции. Решение системы, как и в случае статической модели, приводит к определению уровней производства, но в динамическом варианте в отличие от статического эти искомые уровни зависят от уровней производства в предшествующих периодах.

Модель содержит две матрицы межотраслевых потоков. Матрица текущих производственных затрат с элементами x_{ij} совпадает с соответствующей матрицей статистического баланса. Элементы второй матрицы $\Delta\Phi_{ij}$ показывают, какое количество продукции отрасли i направлено в текущем периоде в отрасль j в качестве капитальных производственных вложений в её основные фонды. Материально это выражается в приросте в потребляющих отраслях производственного оборудования, сооружений, производственных площадей, транспортных средств и др.

Таблица 5.2

Принципиальная схема динамического баланса

Отрасли	Потребляющие – j									
Производящие – i	Межотраслевые потоки текущих затрат				Межотраслевые потоки капитальных вложений				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\Delta\Phi_{11}$	$\Delta\Phi_{12}$	…	$\Delta\Phi_{1n}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\Delta\Phi_{21}$	$\Delta\Phi_{22}$	…	$\Delta\Phi_{2n}$	Y_2	X_2
.	.	.	…	.	.	.	…	.	.	.
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\Delta\Phi_{n1}$	$\Delta\Phi_{n2}$	…	$\Delta\Phi_{nn}$	Y_n	X_n

В статистическом балансе потоки капиталовложений не дифференцируются по отраслям-потребителям и отражаются общей величиной в составе конечной продукции. В динамической схеме конечный продукт Y_i включает продукцию отрасли i, идущую в личное и общественное потребление, накопление непроизводственной сферы, прирост оборотных фондов, незавершенного строительства, на экспорт. Сумма потоков капиталовложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i' = Y_i,$$

поэтому уравнение распределения продукции в динамическом балансе преобразуется в следующее:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i'; \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.24)$$

Межотраслевые потоки текущих затрат можно выразить, как в статической модели, через валовую продукцию отраслей с помощью коэффициентов прямых материальных затрат:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j.$$

В отличие от потоков текущих затрат, межотраслевые потоки капитальных вложений связаны не со всей величиной выпуска продукции, а обуславливают прирост продукции; причем в рассматриваемой модели предполагается, что прирост продукции текущего периода обусловлен вложениями, произведёнными в этом же периоде. Если текущий период обозначить через *t*, то прирост продукции ΔX_j равен разности абсолютных уровней производства в период *t* и в предшествующий $(t-1)$-й период:

$$\Delta X_j = X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}.$$

Полагая, что прирост продукции пропорционален приросту производственных фондов, можно записать:

$$\Delta \Phi_{ij} = \varphi_{ij} \Delta X_j; \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad (5.25)$$

Рассмотрим в равенстве (5.25) коэффициенты пропорциональности. Поскольку

$$\varphi_{ij} = \frac{\Delta \Phi_{ij}}{\Delta X_j},$$

то экономический смысл этих коэффициентов заключается в том, что они показывают, какое количество продукции отрасли *i* должно быть вложено в отрасль j для увеличения производственной мощности отрасли j на единицу продукции. Предполагается, что производственные мощности используются полностью и прирост продукции равен приросту мощности. Коэффициенты φ_{ij} называются *коэффициентами вложений*, или *коэффициентами приростной фондоемкости*.

С помощью коэффициентов прямых материальных затрат и коэффициентов вложений φ_{ij} систему уравнений (5.24) можно представить в следующем виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \Delta X_j + Y_i'; \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.26}$$

Система (5.26) представляет собой систему линейных разностных уравнений первого порядка. Её можно привести к обычной системе линейных уравнений, если учесть, что все объемы валовой и конечной продукции относятся к некоторому периоду t, а прирост валовой продукции определен в сравнении с $(t-1)$–м периодом:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \left(X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)} \right) + Y_i'.$$

Отсюда можно записать следующие соотношения:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + \varphi_{ij} \right) X_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} X_j^{(t-1)} + Y_i'^{(t)}; \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.27}$$

Пусть нам известны уровни валовой продукции всех отраслей в предыдущем периоде (величины $X_j^{(t-1)}$) и конечный продукт отраслей в периоде t. Тогда очевидно, что соотношение (5.27) представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными уровнями производства периода t. Таким образом, решение динамической системы линейных уравнений позволяет определить выпуск продукции в последующем периоде. Связь между периодами устанавливается через коэффициенты вложений φ_{ij}, характеризующие фондоемкость прироста единицы продукции. Получим следующую систему соотношений:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{dX_j}{dt} + Y_i'; \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.28)$$

Соотношения (5.28) представляют собой систему n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Для ее решения помимо матриц коэффициентов прямых материальных текущих затрат и коэффициентов капитальных затрат (вложений) необходимо узнать уровни валового выпуска в начальный период времени $t = 0$ и закон изменения величины конечного продукта, т.е. вид функций $Y_i'(t)$. На основе этих данных путем решения получившейся задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (5.28) можно найти уровни валового выпуска теоретически для любого момента времени. Практически же более или менее достоверное описание валовых и конечных выпусков как функций времени может быть получено лишь для относительно небольших промежутков времени.

В динамической модели особую роль играют коэффициенты приростной фондоемкости φ_{ij}. Они образуют квадратную матрицу порядка

$$(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots; \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

каждый столбец которой характеризует для соответствующей отрасли j величину и структуру фондов, необходимых для увеличения на единицу ее производственной мощности (выпуска продукции). Матрица коэффициентов приростной фондоемкости дает значительный материал для экономического анализа и планирования капитальных вложении.

Коэффициенты приростной фондоемкости φ_{ij} определенным образом связаны с валовыми коэффициентами прямой фондоемкости продукции f_{kj}. Коэффициенты f_{kj} показывают, сколько всего фондов данного вида приходится на единицу валового выпуска продукции, а коэффициенты φ_{ij} отражают прирост фондов на единицу прироста продукции. Если бы технический прогресс в отраслях производства отсутствовал, то на единицу прироста продукции потребовалось бы столько же новых фондов, сколько их уже занято на единицу выпускаемой продукции, т.е. коэффициенты приростной фондоемкости и валовой прямой фондоемкости были бы равны между собой. Так как новые капитальные вложения производятся на новом, более высоком техническом уровне по сравнению с объёмом и структурой действующих фондов, то на практике коэффициенты приростной фондоемкости различаются по величине. Однако между этими двумя группами коэффициентов существует вполне определенная связь, и это используется при разработке динамических моделей, особенно в связи с тем, что достоверные данные о фондоемкости продукции получить легче, чем непосредственно рассчитать коэффициенты вложений.

Кроме коэффициентов прямой фондоемкости, коэффициенты вложений связаны с другими показателями, например, с соответствующими коэффициентами текущих затрат, отражающими износ основных фондов и равными амортизации, приходящейся на единицу продукции.

В рассмотренной динамической модели межотраслевого баланса предполагается, что прирост продукции текущего периода обусловлен вложениями, произведенными в этом же периоде. Для сравнительно коротких периодов это предположение может оказаться нереальным, т.к. существуют известные, иногда довольно значительные отставания во времени (*временные лаги*) между вложением средств в производственные фонды и приростом выпуска продукции. Модели, так или иначе учитывающие лаг капитальных вложений, образуют особую группу динамических моделей межотраслевого баланса. Из теоретических моделей данного типа следует назвать прежде всего линейную динамическую межотраслевую модель Леонтьева, в которой капитальные вложения представлены в виде так называемого инвестиционного блока в форме Леонтьева. Математическим обобщением этой и ряда других динамических моделей является динамическая модель в матричной форме Неймана, основанная на математической теории равномерного пропорционального роста экономики (так называемая *магистральная теория*).

Контрольные вопросы

1. В чем состоит суть балансового метода исследования социально-экономических систем?

2. Поясните принципиальную схему межотраслевого баланса и раскройте экономическое содержание ее разделов.

3. Опишите экономико-математическую модель статического межотраслевого баланса и поясните экономический смысл входящих в нее элементов.

4. Дайте определение коэффициентов прямых и полных материальных затрат и укажите способы их вычисления.

5. Раскройте экономический смысл коэффициентов прямой и полной трудоемкости и дайте описание экономико-математической модели межотраслевого баланса затрат труда.

6. Раскройте содержательный смысл принципиальной схемы динамического межотраслевого баланса. Дайте характеристику динамической межотраслевой балансовой модели.

Словарь терминов

Балансовая модель – метод формализованного описания взаимного соответствия ресурсов и потребностей в них, доходов и расходов.

Матричный техпромфинплан предприятия – математическая модель годового плана производственно-технической и финансовой деятельности промышленного предприятия; характеризует в единстве производство и распределение продукции на нем, включая сырье, энергию, комплектующие изделия, полуфабрикаты и конечную продукцию.

Прямые затраты – характеристика потребления различными отраслями экономики предметов труда, услуг, основных фондов, трудовых, природных и других ресурсов.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса – построение, анализ и использование экономико-математических моделей, отражающих взаимосвязи отраслей народного хозяйства, распределение между ними выпуска продукции и услуг, формирование конечного продукта и ряд других аспектов функционирования и развития экономики.

Межпродуктовый баланс – межотраслевой баланс производства и распределения продукции, построенный в натуральных единицах измерения, индивидуальных для каждого отдельного вида продукции.

Полные затраты – характеристика непосредственного и косвенного потребления продукции для выпуска конечного продукта.

Трудоемкость – затраты труда на производство продукции или на выполнение какой-либо технологической операции.

Фондоемкость – удельный показатель, характеризующий потребность в основных средствах для обеспечения производства единицы продукции (единицы стоимости продукции).

Статические модели – в экономике предполагают моделируемую систему неизменной во времени, т.е. полностью отвлекаются от ее в принципе возможных изменений, поскольку их учет не требуется для достижения цели моделирования; кроме того, предполагается, что все интересующие исследователя процессы, происходящие в системе, не требуют при своем описании развертывания во времени, так что могут быть с достаточной точностью охарактеризованы не зависящими от времени величинами – известными и неизвестными.

Динамические модели – в экономике описывают изменение моделируемой системы во времени, поэтому время в динамических моделях представляется явно – либо как непрерывная величина, либо дискретно, конечным набором или бесконечной последовательностью дискретных значений.

Магистральная теория – раздел математической экономики, посвященный анализу траекторий пропорционального (сбалансированного) роста и оптимальных траекторий динамических народно-хозяйственных моделей.

6. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Цели изучения

Эконометрическая модель определяется как экономико-математическая модель факторного анализа, параметры которой оцениваются средствами математической статистики. В этой связи основные цели изучения представленного материала можно сформулировать следующим образом:

– понимание природы эконометрических моделей и представление экономического анализа на базе эконометрических моделей;
– рассмотрение методов экономического анализа на основе регрессионных эконометрических моделей;
– определение качества эконометрических регрессионных моделей и прогнозирование на их основе.

Основные вопросы

Общие понятия эконометрических моделей. Понятие «эконометрическая модель». Модель Брандона. Аналитические формы модели. Факторные признаки и результативные. Характеристика регрессионных моделей. Определение взаимозависимых систем. Рекурсивные системы. Мультиколлинеарность и качество модели. Методы исключения и метод включения.

Задачи экономического анализа, решаемые на основе регрессионных эконометрических моделей. Уравнение регрессии. Коэффициент регрессии. Коэффициент корреляции. Коэффициент детерминации. Коэффициент эластичности. Совокупный коэффициент детерминации. Частный коэффициент корреляции. Частный коэффициент детерминации. Частный коэффициент эластичности.

Оценка качества эконометрических регрессионных моделей и прогнозирование на их основе. Значимость коэффициентов регрессии. Значимость модели.

6.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При анализе экономических явлений на основе экономико-математических методов особое место занимают модели, выявляющие количественные связи между изучаемыми показателями и влияющими на них факторами. Научной дисциплиной, предмет которой составляет изучение этой количественной стороны экономических явлений и процессов средствами математического и статистического анализа, является *эконометрия*, в которой результаты теоретического анализа экономики синтезируются с выводами математики и статистики. Основная задача эконометрии – проверка экономических теорий на фактическом (эмпирическом) материале при помощи методов математической статистики.

Главным инструментом эконометрии служит *эконометрическая модель*, т.е. экономико-математическая модель факторного анализа, параметры которой оцениваются средствами математической статистики. Эта модель выступает в качестве средства анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов на основе реальной статистической информации.

Эконометрические модели можно классифицировать по ряду классификационных признаков. По *аналитической форме* модели (уравнения) выделяют линейные, нелинейные, степенные модели, модели Брандона.

Одной из основных классификационных рубрик эконометрических моделей является классификация по направлению и сложности причинных связей между показателями, характеризующими экономическую систему. Если пользоваться термином «переменная», то в любой достаточно сложной экономической системе можно выделить внутренние переменные (например, выпуск продукции, численность работников, производительность труда) и внешние переменные (например, поставка ресурсов, климатические условия и др.)

По направлению и сложности связей между внутренними (эндогенными, выходными) переменными и внешними (экзогенными, входными) переменными выделяют следующие эконометрические модели: регрессионные модели, взаимозависимые системы, рекурсивные системы.

Регрессионными называются модели, основанные на уравнении регрессии, или системе регрессионных уравнений, связывающих величины эндогенных и экзогенных переменных. Различают уравнения (модели) парной и множественной регрессии. Если для обозначения эндогенных переменных использовать (y), а для экзогенных переменных (x), то в случае линейной модели уравнение парной регрессии имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x,$$

а уравнение множественной регрессии

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m.$$

Отметим, что параметры моделей парной и множественной регрессии находятся на основе метода наименьших квадратов.

Взаимозависимые системы наиболее полно описывают экономическую систему, содержащую множество взаимосвязанных эндогенных и экзогенных переменных:

$$y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n\,;$$

$$y_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n\,;$$

$$\ldots$$

$$y_3 = a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{3n}y_n\,.$$

Для нахождения параметров системы взаимозависимых уравнений используются более сложные методы: двух– и трехшаговый метод наименьших квадратов, методы максимального правдоподобия с полной и неполной информацией и др.

На практике стремятся упростить взаимозависимые системы и привести их к так называемому рекурсивному виду. Для этого сначала выбирают эндогенную переменную (внутренний показатель), зависящую только от экзогенных переменных (внешних факторов), обозначают ее (y_1). Затем выбирается внутренний показатель, который зависит только от внешних факторов – от (y_1) и т.д.; таким образом, каждый последующий показатель зависит только от внешних факторов и от внутренних предыдущих. Такие системы называются *рекурсивными.* Параметры первого уравнения рекурсивных систем находят методом наименьших квадратов, их подставляют во второе уравнение, и опять применяется метод наименьших квадратов, и т.д.

Процесс построения и использования эконометрических моделей является достаточно сложным и включает в себя следующие основные этапы:

- определение цели исследования;
- построение системы показателей и логический отбор факторов, наиболее влияющих на каждый показатель;
- выбор формы связи изучаемых показателей между собой и отобранными факторами, другими словами, выбор типа эконометрической модели;
- сбор исходных данных и анализ информации;

– построение эконометрической модели, т.е. определение ее параметров;
– проверка качества построенной модели, в первую очередь ее адекватности изучаемому экономическому процессу;
– использование модели для экономического анализа и прогнозирования.

Основные требования, предъявляемые к включаемым в эконометрическую модель факторам:

– каждый из факторов должен быть обоснован теоретически;
– в перечень целесообразно включать только важнейшие факторы, оказывающие существенное воздействие на изучаемые показатели;
– факторы не должны быть линейно зависимыми (поскольку эта зависимость означает, что они характеризуют аналогичные свойства изучаемого явления);
– влияющие на экономический процесс факторы могут быть количественными и качественными. В модель рекомендуется включать только такие факторы, которые могут быть численно измерены;
– в одну модель нельзя включать совокупный фактор и образующие его частные факторы.

При отборе влияющих факторов используются статистические методы отбора. Среди пошаговых процедур отбора факторов наиболее часто используются процедуры пошагового включения и исключения факторов.

Метод исключения предполагает построение уравнения, включающего всю совокупность переменных, с последующим последовательным (пошаговым) сокращением числа переменных в модели до тех пор, пока не выполнится некоторое наперед заданное условие.

Метод включения предполагает последовательное включение переменных в модель до тех пор, пока регрессионная модель не будет отвечать заранее установленному критерию качества. Последовательность включения определяется с помощью частных коэффициентов корреляции: переменные, имеющие относительно исследуемого показателя большее значение частного коэффициента корреляции, первыми включаются в регрессионное уравнение.

Одной из предпосылок применения методов регрессионного анализа является отсутствие среди независимых переменных (факторов) линейно связанных. Если данная предпосылка не выполняется, то возникает явление мультиколлинеарности, т.е. наличия сильной корреляции между независимыми переменными (включенными в модель факторами). В математическом аспекте мультиколлинеарность приводит к слабой обусловленности матрицы системы нормальных уравнений, т.е. близости ее определителя к нулю, а в содержательном аспекте – к искажению смысла коэффициентов регрессии и затруднению выявления наиболее существенно влияющих факторов.

Основные причины, вызывающие мультиколлинеарность, – независимые переменные, либо характеризующие одно и то же свойство изучаемого явления, либо являющиеся составными частями одного и того же признака.

В настоящее время существует ряд методов, позволяющих оценить наличие мультиколлинеарности в совокупности независимых переменных, измерить ее степень, выявить взаимно коррелированные переменные и устранить или ослабить ее негативное влияние на регрессионную модель. Наиболее распространенным методом выявления мультиколлинеарности является метод корреляции. На практике считают, что две переменные коллинеарны (линейно зависимы), если парный коэффициент корреляции между ними по абсолютной величине превышает 0,8. Устраняется мультиколлинеарность путем исключения из модели одного из коррелированных факторов.

6.2. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, РЕШАЕМЫЕ НА ОСНОВЕ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Вопросы построения и использования эконометрических моделей рассмотрим более подробно на примере линейных регрессионных моделей как в случае парной регрессии (однофакторная модель), так и в случае множественной регрессии (многофакторная модель); в последнем случае будем рассматривать модели множественной регрессии на примере линейной двухфакторной модели.

Основу математического аппарата для рассматриваемых моделей составляют такие разделы математической статистики, как корреляционный и регрессионный анализ. Для определенности эндогенные переменные в этих моделях будем называть результативными признаками и обозначать их (y), а экзогенные переменные будем называть факторными признаками и обозначать их (x). Методы корреляционно-регрессионного анализа позволяют решать три основные задачи:

– определение формы связи между результативным и факторными признаками;
– измерение тесноты связи между ними;
– анализ влияния отдельных факторных признаков.

Рассмотрим решение этих задач для указанных видов эконометрических моделей; при этом для наглядности будем иллюстрировать выводы на конкретном примере экономического анализа.

В табл. 6.1 представлены статистические данные о расходах на питание, душевом доходе и размере семьи для девяти групп семей. Требуется проанализировать зависимость величины расходов на питание от величины душевого дохода и размера семьи. Этот показатель будет результативным признаком, который обозначим (y), а два других будут факторными признаками, или просто факторами, и мы их обозначим соответственно $(x_1 \text{ и } x_2)$.

Таблица 6.1

Распределение расходов на питание в зависимости от среднедушевого дохода и размера семьи

Номер группы	Расход на питание (y)	Душевой доход (x_1)	Размер семьи (x_2)
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Рассмотрим однофакторную линейную модель зависимости расходов на питание (y) от величины душевого дохода семей (x_1). Она выражается линейной функцией вида

$$y = a_0 + a_1 x_1, \tag{6.1}$$

параметры которой a_0 и a_1 находятся в результате решения системы нормальных уравнений, формирующейся на основе метода наименьших квадратов. Система нормальных уравнений для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum x_1\right)a_1 = \sum y \\ \left(\sum x_1\right)a_0 + \left(\sum x_1^2\right)a_1 = \sum yx_1, \end{cases} \tag{6.2}$$

где суммирование проводится по всем (n) группам. Используя данные таблицы, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 = 11825, \\ 54725a_0 + 540789321a_1 = 98049159, \end{cases}$$

решением которой являются значения $a_0 = 549{,}68$ и $a_1 = 0{,}1257$. Таким образом, модель имеет вид

$$y = 549{,}68 + 0{,}1257x_1 . \qquad (6.3)$$

Уравнение (6.3) называется *уравнением регрессии,* коэффициент a_1 – *коэффициентом регрессии.* Направление связи между $(y$ и $x_1)$ определяет знак коэффициента регрессии a_1; в нашем случае данная связь является прямой. Теснота этой связи определяется *коэффициентом корреляции* (парным):

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{S_{yx_1}^2}{S_y^2}}\,, \qquad (6.4)$$

где S_y – средняя квадратическая ошибка выборки (y) из табл.6.1:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}}\,,$$

$\bar{y}$ – средняя арифметическая значений (y);

S_{yx_1} – средняя квадратическая ошибка уравнения (6.3) для числа степеней свободы $(n-2)$:

$$S_{yx_1} = \sqrt{\frac{\sum (y - y')^2}{n-2}}\,,$$

y' – соответствующее значение расходов на питание, вычисленное по модели (6.3).

В этих формулах суммирование ведется по всем группам от 1 до *n*.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее корреляционная связь. В нашем примере $S_y^2 = 454070$ и $S_{yx_1}^2 = 63846$:

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{63846}{454070}} = 0{,}927 .$$

Полученное значение $r_{yx_1} = 0{,}927$ свидетельствует, что связь между расходами на питание и душевым доходом очень тесная.

Величина $r_{yx_1}^2$ называется *коэффициентом детерминации* и показывает долю изменения результативного признака под действием факторного признака. В нашем случае $r_{yx_1}^2 = 0{,}859$; это означает, что фактором душевого дохода можно объяснить почти 86% изменения расходов на питание.

Коэффициенты регрессии нельзя использовать для непосредственной оценки влияния факторов на результативный признак из-за различия единиц измерения исследуемых показателей. Для этих целей вычисляются коэффициенты эластичности и бета-коэффициент.

Коэффициент эластичности для рассматриваемой модели парной регрессии рассчитывается по формуле

$$Э_{yx_1} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}}. \tag{6.5}$$

Он показывает, на сколько процентов изменяется результативный признак (y) при изменении факторного признака (x_1) на один процент.

В нашем примере коэффициент регрессии $a_1 = 0{,}1257$, а средние арифметические $\bar{x}_1 = 6080{,}6$ и $\bar{y} = 1313{,}9$. Поэтому коэффициент эластичности расходов на питание в зависимости от душевого дохода будет равен

$$Э_{yx_1} = \frac{0{,}1257 \cdot 6080{,}6}{1313{,}9} = 0{,}58.$$

Это означает, что при увеличении душевого дохода на 1% расходы на питание увеличатся на 0,58%.

Бета-коэффициент в нашем случае задается формулой:

$$\beta_{yx_1} = \frac{a_1 S_{x_1}}{S_y}, \tag{6.6}$$

где S_{x_1} и S_y – средние квадратические ошибки выборки величин $(y$ и $x_1)$ из табл. 6.1 соответственно.

Величина $S_y^2 = 454070$ уже была рассчитана ранее, поэтому величина $S_y = 673{,}8$; аналогичные расчеты дают значение величины $S_{x_1} = 4242{,}0$. Бета-коэффициент показывает, на какую часть величины своего среднего квадратического отклонения изменится в среднем значение результативного признака при изменении факторного признака на величину его среднеквадратического отклонения.

В нашем случае получаем следующее значение бета-коэффициента:

$$\beta_{yx_1} = \frac{0{,}1257 \cdot 4242{,}0}{673{,}8} = 0{,}79,$$

т.е. увеличение душевого дохода на величину среднеквадратического отклонения этого показателя приведет к увеличению среднего значения расходов на питание на 0,79 среднеквадратического отклонения этих расходов.

Задача анализа тесноты связи между результативным и одним из факторных признаков при неизменных значениях других факторов решается в многофакторных моделях при помощи *частных коэффициентов корреляции,* которые рассчитываются по формуле

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}. \quad (6.7)$$

Если частные коэффициенты корреляции возвести в квадрат, то получим *частные коэффициенты детерминации,* показывающие долю вариации результативного признака под действием одного из факторов при неизменном значении другого фактора.

Влияние отдельных факторов в многофакторных моделях может быть охарактеризовано с помощью *частных коэффициентов эластичности,* которые рассчитываются по формулам:

$$Э_{yx_1(x_2)} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}}; \quad Э_{yx_2(x_1)} = \frac{a_2 \bar{x}_2}{\bar{y}}. \quad (6.8)$$

6.3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ИХ ОСНОВЕ

Качество линейных эконометрических моделей регрессии оценивается стандартным для экономико-математических моделей образом: по адекватности и точности. Адекватность регрессионных моделей может быть установлена на основе анализа остаточной последовательности. Остаточная последовательность проверяется на выполнение свойств случайной компоненты временного экономического ряда:

– близость нулю математического ожидания;
– случайный характер отклонений;

– отсутствие автокорреляции и нормальность закона распределения.

О качестве моделей регрессии можно судить также по значениям коэффициента корреляции (индекса корреляции) и коэффициента детерминации для однофакторной модели и по значениям коэффициента множественной корреляции и совокупного коэффициента детерминации для моделей множественной регрессии.

Для оценки точности регрессионных моделей обычно используются те же статистические критерии точности, что и для трендовых моделей, в частности, средняя относительная ошибка аппроксимации. Проверка *значимости модели* регрессии проводится с использованием F-критерия Фишера, расчетное значение которого находится как отношение дисперсии исходного ряда наблюдений изучаемого показателя и несмещенной оценки дисперсии остаточной последовательности для данной модели. Если расчетное значение этого критерия со степенями свободы $v_1 = n-1$ и $v_2 = n-m-1$, где n – количество наблюдений и m – число включенных в модель факторов, больше табличного значения критерия Фишера при заданном уровне значимости, то модель признается значимой.

При проверке качества регрессионной модели целесообразно оценивать также *значимость коэффициентов регрессии*. Эта оценка проводится по t-статистике Стьюдента путем проверки гипотезы о равенстве нулю коэффициента регрессии $k = 1,2,\ldots,m$. Расчетное значение t-критерия с числом степеней свободы $(n-m-1)$ находят путем деления коэффициента регрессии (k) на среднеквадратическое отклонение этого коэффициента. Это расчетное значение сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента при заданном уровне значимости, и если оно больше табличного значения, то коэффициент регрессии считается значимым. В противном случае соответствующий данному коэффициенту регрессии фактор следует исключить из модели, при этом качество модели не ухудшается.

Перейдем к вопросу экономического прогнозирования на основе модели регрессии; при этом будем предполагать, что модель, построенная на базе временных рядов изучаемого показателя и включенных в модель факторов, является адекватной и достаточно точной. При использовании построенной модели для прогнозирования делается предположение о сохранении существовавших ранее взаимосвязей переменных и на период упреждения.

Для прогнозирования зависимой переменной (результативного признака) на L шагов вперед необходимо знать прогнозные значения всех входящих в модель факторов. Эти значения могут быть получены на основе экстраполяционных методов, например, с использованием средних абсолютных приростов факторных признаков; они могут быть определены методами экспертных оценок или непосредственно заданы исследователем экономического процесса. Прогнозные значения факторов подставляют в модель и получают точечные прогнозные оценки изучаемого показателя.

Контрольные вопросы

1. Дайте общее понятие эконометрической модели. Какие виды эконометрических моделей вы знаете?

2. Чем вызывается явление мультиколлинеарности в многофакторных эконометрических моделях?

3. Как явление мультиколлинеарности сказывается на качестве моделей?

4. Какие задачи экономического анализа решаются на основе эконометрических моделей регрессии?

5. Раскройте экономический смысл коэффициентов парной и множественной корреляции, коэффициентов детерминации, совокупных коэффициентов детерминации.

6. Каким образом может быть оценено качество моделей регрессии?

Словарь терминов

Эконометрия (от греч. *измеряю*) – научная дисциплина, позволяющая на базе положений экономической теории и результатов экономических измерений придавать конкретное количественное выражение общим закономерностям, обусловленным экономической теорией.

Эконометрическая модель – экономико-математическая модель факторного анализа, параметры которой оцениваются средствами математической статистики.

Регрессия (от лат. *движение назад*) – зависимость условного среднего значения результирующего показателя, вычисленного при условии, что величины предсказывающих переменных зафиксированы на уровнях от заданных значений объясняющих переменных.

Мультиколлинеарность – понятие, употребляемое в регрессионном анализе для описания ситуации.

Коэффициент корреляции – показатель меры тесноты связи между зависимыми друг от друга статистическими величинами.

Эластичность – числовая характеристика относительного изменения одной из двух взаимосвязанных величин при фиксированном изменении другой.

Качество (модели) – технико-экономическая категория, выражающая влияние используемого объекта на человека и окружающую человека естественную и искусственную среду обитания.

7. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ СВЯЗЬ И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ

Цели изучения

Основная задача изучения представленного материала заключается в следующем:

– ознакомиться с понятиями «корреляция» и «регрессия»;
– определить методы выявления связи между двумя признаками;

– изучить способы оценки тесноты корреляционной связи в случае парной зависимости;
– исследовать основные этапы процесса анализа уравнения регрессии.

Основные вопросы

Понятие о корреляционной связи. Понятие «факторные признаки». Термины: результативные признаки, функциональная связь, корреляционная связь, количественная оценка.

Статистические методы выявления корреляционной связи между двумя признаками. Простейший прием обнаружения связи: сопоставление двух параллельных рядов. Построение корреляционной таблицы. Прием построения групповой таблицы. Предварительное выявление наличия связи между двумя признаками.

Измерение степени тесноты корреляционной связи в случае парной зависимости. Простейший показатель степени тесноты – коэффициент корреляции знаков. Совершенный показатель степени тесноты связи – линейный коэффициент корреляции.

Уравнение регрессии. Определение теоретической линии регрессии. Коэффициент регрессии. Коэффициент эластичности. Средняя квадратическая ошибка уравнения регрессии.

Множественная корреляция. Формула определения значения индекса корреляции. Определение влияния колебания различных факторов на вариацию исследуемого показателя. Матрица парных коэффициентов корреляции. Коэффициент детерминации. Коэффициент частной корреляции.

7.1. ПОНЯТИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СВЯЗИ

Статистические распределения характеризуются наличием более или менее значительной вариации в величине признака у отдельных единиц совокупности. Изучение зависимости вариации признака от окружающих условий и составляет содержание теории корреляции.

Основоположниками теории корреляции считаются английские биометрики Ф. Гальтон (1822-1911) и К. Пирсон (1857-1936). Термин «корреляция» был заимствован из естествознания и обозначает соотношение, соответствие. Представление о корреляции как об отношении, взаимозависимости между случайными переменными величинами лежит в основе математико-статистической теории корреляции.

При изучении конкретных зависимостей одни признаки выступают в качестве факторов, обуславливающих изменение других признаков. Признаки этой первой группы в дальнейшем будем называть признаками-факторами (**факторными признаками**), а признаки, которые являются результатом влияния этих факторов, будем называть **результативными**.

Рассматривая зависимости между признаками, необходимо выделить две категории зависимости: 1) функциональные и 2) корреляционные.

Функциональные связи характеризуются полным соответствием между изменением факторного признака и изменением результативной величины, и каждому значению признака-фактора соответствуют вполне определенные значения результативного признака.

В **корреляционных связях** между изменением факторного и результативного признака нет полного соответствия, воздействие отдельных факторов проявляется лишь в среднем при массовом наблюдении фактических данных.

Экономической теории принадлежит решающее слово в обосновании связей между теми или иными признаками. При этом теоретический анализ должен показать, какие факторы влияют на исследуемый признак или же влияние каких факторов должно быть проверено. Статистическое выражение связи между явлениями может показать, что изменения одного из сопоставляемых признаков сопровождаются изменениями другого.

При исследовании корреляционных зависимостей между признаками решению подлежит широкий круг вопросов, к которым следует отнести:

1) предварительный анализ свойств моделируемой совокупности единиц;

2) установление факта наличия связи, определение ее направления и формы;

3) измерение степени тесноты связи между признаками;

4) построение регрессионной модели, т.е. нахождение аналитического выражения связи;

5) оценка адекватности модели, ее экономическая интерпретация и практическое использование.

Для того чтобы результаты корреляционного анализа нашли практическое применение и дали желаемый результат, должны выполняться определенные требования в отношении отбора объекта исследования и признаков-факторов.

Одним из важнейших условий правильного применения методов корреляционного анализа является требование однородности тех единиц, которые подвергаются изучению методами корреляционного анализа. Например, при корреляционном анализе зависимостей тех или иных технико-экономических показателей работы предприятий от определённых факторов должны быть отобраны предприятия, выпускающие однотипную продукцию, имеющие одинаковый характер технологического процесса и тип используемого оборудования; для предприятий добывающей промышленности определенную роль играет и географическое размещение предприятий.

При выполнении указанных общих требований далее необходима **количественная оценка** однородности исследуемой совокупности по комплексу признаков. Одним из возможных вариантов такой оценки является расчет *относительных показателей вариации.* Традиционно широкое распространение для этих целей получил *коэффициент вариации.* Несколько реже применяется *отношение размаха вариации к среднеквадратическому* отклонению.

Другим важным требованием, обеспечивающим надежность выводов корреляционного анализа, является требование *достаточного числа наблюдений.* Как уже указывалось, влияние существенных причин может быть затушевано действием случайных факторов, нивелирование влияния которых на результативный показатель в известной мере происходит при выведении средней результативного показателя для массы случаев.

Все множество факторов, оказывающих влияние на величину результативного показателя, в действительности не может быть исследовано, да практически в этом и нет необходимости, так как их роль и значение в формировании величины результативного показателя существенно различаются. Поэтому при ограничении числа факторов, включаемых в исследование, наряду с качественным анализом целесообразно использовать и определенные количественные оценки, позволяющие конкретно охарактеризовать влияние факторов на результативный показатель (к оценкам можно отнести *парные коэффициенты корреляции*). Выбранные факторы должны быть независимыми друг от друга, так как наличие тесной связи между ними свидетельствует о том, что они характеризуют одни и те же стороны изучаемого явления и в значительной мере дублируют друг друга.

При построении корреляционных моделей факторы должны иметь количественное выражение, иначе составить модель корреляционной зависимости не представляется возможным.

7.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ НАЛИЧИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРИЗНАКАМИ

Для ответа на вопрос о наличии или отсутствии корреляционной связи используется ряд специфических методов: так называемые элементарные приемы, а также дисперсионный анализ. Простейшим приемом обнаружения связи является сопоставление двух параллельных рядов – ряда значений факторного признака и соответствующих ему значений результативного признака. Значения факторного признака располагают в возрастающем порядке и затем прослеживают направление изменения величины результативного признака. Результативный признак (функцию) в дальнейшем будем обозначать через y, а факторный признак – через x.

В тех случаях, когда возрастание величины факторного признака влечет за собой возрастание и величины результативного признака, говорят о возможном наличии прямой корреляционной связи. Если же с увеличением факторного признака величина результативного признака имеет тенденцию к уменьшению, то можно предполагать обратную связь между признаками.

Однако наличие большого числа различных значений результативного признака, соответствующих одному и тому же значению признака-фактора, затрудняет восприятие таких параллельных рядов, особенно при большом числе единиц, составляющих изучаемую совокупность. В таких случаях целесообразнее воспользоваться для установления факта наличия связи статистическими таблицами – корреляционными или групповыми.

Построение **корреляционной таблицы** (рис. 7.1) начинают с группировки значений факторного и результативного признаков.

В корреляционной таблице факторный признак x, как правило, располагают в строках, а результативный признак y – в столбцах (графах) таблицы. Числа, расположенные на пересечении строк и столбцов таблицы, означают частоту повторения данного сочетания значений x и y.

Таблица 7.1

Пример корреляционной таблицы

Центральное значение интервала, y	768	865	962	1059	1156	f_x	$\overline{Y}_j$
Группы по y / Группы по x	720-816	817-913	914-1010	1011-1107	1108-1207		
1	2	3	4	5	6	7	8
8	2	1				3	800
9	1	3	1			5	865
10		1	3	1		5	962
11		1	1		2	4	1035
12			1	1	1	3	1059
f_y	3	6	6	2	3	20	

Корреляционная таблица уже при общем знакомстве дает возможность выдвинуть предположение о наличии или отсутствии связи, а также выяснить ее направление. Если частоты корреляционной таблице расположены на диагонали из левого верхнего угла в правый нижний (т.е. большим значениям фактора соответствуют большие значения функции), то можно предположить наличие прямой корреляционной зависимости между признаками. Если же частоты расположены по диагонали справа налево, то предполагают наличие обратной связи между признаками.

Уместно подчеркнуть, что при рассмотрении корреляционной таблицы важно установить расположение основной части частот. Возможны варианты, когда все клетки корреляционной таблицы окажутся заполненными. Однако это обстоятельство еще не означает, что корреляционная связь между признаками отсутствует. Нужно установить, как расположена в таблице основная масса частот. Для того чтобы сделать восприятие корреляционной таблицы более доступным и более четко выявить основную тенденцию связи, можно для каждой строки рассчитать средние значения результативного признака, соответствующие определенному значению признака-фактора (каждая строка таблицы дает условное распределение *y* при определенном значении *x*).

Корреляционная таблица позволяет сжато, компактно изложить материал, поэтому все последующие расчеты (показателей тесноты связи и параметров уравнения регрессии) можно вести по корреляционной таблице.

Другим возможным приемом обнаружения связи является построение групповой таблицы (табл. 7.2). Все наблюдения разбиваются на группы в зависимости от величины признака-фактора, и по каждой группе вычисляются средние значения результативного признака.

Таблица 7.2

Сортировка наблюдений по группам

Группы туристических фирм по затратам на рекламу, усл. ден. ед.	Число фирм в группе	Среднее число туристов, воспользовавшихся услугами данной группы фирм, человек
8	3	790
9	5	860
10	5	966
11	4	1063
12	3	1100
Итого	20	

Сравнив средние значения результативного признака по группам, можно сделать вывод, что рост затрат туристических фирм на рекламу влечет за собой увеличение числа клиентов, пользующихся услугами фирмы, т.е. в рассматриваемом примере можно предположить наличие прямой корреляционной зависимости между признаками.

Корреляционная зависимость отчетливо обнаруживается только при рассмотрении средних значений результативного признака, соответствующих определенным значениям факторного признака, так как при достаточно большом числе наблюдений в каждой группе влияние прочих случайных факторов при расчете групповой средней будет взаимопогашаться и четче выступит зависимость результативного признака от фактора, положенного в основу группировки. Предполагается, что все прочие причины, если они носят случайный характер, при определении средней по группам взаимопогашаются, т.е. дают в каждой группе один и тот же результат. Следовательно, различия в величине средних значений будут связаны только с различиями в величине данного факторного признака. Если бы связи между факторным и результативным признаками не было, то все групповые средние были бы приблизительно одинаковыми по величине. Оценка существенности расхождения групповых средних лежит в основе использования методов дисперсионного анализа для выявления наличия и оценки существенности связи.

Одним из недостатков аналитической группировки является неоднозначность результатов, которые зависят как от числа выделяемых групп, так и от установления границ интервалов.

7.3. ИЗМЕРЕНИЕ СТЕПЕНИ ТЕСНОТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СВЯЗИ В СЛУЧАЕ ПАРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Зная показатели тесноты корреляционной связи, можно решать следующие задачи:

1) ответить на вопрос о необходимости изучения данной связи между признаками и целесообразности ее практического применения;

2) сопоставляя показатели тесноты связи для различных ситуаций, судить о степени различий в ее проявлении для конкретных условий;

3) сопоставляя показатели тесноты связи результативного признака с различными факторами, выявить те факторы, которые в данных конкретных условиях являются решающими и главным образом воздействуют на формирование величины результативного признака.

К простейшим показателям степени тесноты связи относят **коэффициент корреляции знаков,** который был предложен немецким ученым Г. Фехнером (1801-1887). Этот показатель основан на оценке степени согласованности в направлении отклонений индивидуальных значений факторного и результативного признаков от соответствующих средних. Для его расчета вычисляют средние значения результативного и факторного признаков, а затем проставляют знаки отклонений для всех значений взаимосвязанных пар признаков.

Если ввести обозначения n_a – число совпадений знаков отклонений индивидуальных величин от средней, n_b – число несовпадений знаков отклонений, то коэффициент Фехнера можно записать таким образом:

$$K_{ф} = \frac{n_b - n_a}{n_a + n_b}. \qquad (7.1)$$

Коэффициент Фехнера может принимать различные значения в пределах от 1 до +1. Если знаки всех отклонений совпадут, то $n_b = 0$, и тогда показатель будет равен 1, что свидетельствует о возможном наличии прямой связи. Если признаки всех отклонений будут разными, тогда $n_a = 0$ и коэффициент Фехнера будет равен -1, что дает основание предположить наличие обратной связи.

Рассмотрим расчет $K_{ф}$ на примере, приведенном в табл. 7.3.

Средний размер затрат на рекламу по всем 20 фирмам составляет 9,95 условных денежных единиц, а среднее число туристов, воспользовавшихся услугами фирмы, – 952 человека. В графах 4 и 5 таблицы указаны знаки отклонений значений признаков от соответствующей средней.

Подсчитав число совпадений знаков $n_a = 16$ и число несовпадений знаков $n_b = 4$ (см. графу 6 таблицы), рассчитаем коэффициент Фехнера (7.1): $K_{Ф} = \frac{16 - 4}{16 + 4}$.

Полученная величина коэффициента Фехнера свидетельствует о том, что можно предполагать наличие прямой зависимости между исследуемыми признаками.

Таблица 7.3

Сортировка наблюдений по группам

Порядковый номер фирмы	Затраты на рекламу, усл. ден. ед. x_i	Количество туристов, воспользовавшихся услугами фирмы, человек	Знаки отклонений индивидуальных значений признака от средней		Совпадение (a) или несовпадение (b) знаков
			Для x_i	Для y_i	
1	8	800	–	–	a
2	8	850	–	–	a
3	8	720	–	–	a
4	9	850	–	–	a
5	9	800	–	–	a
6	9	880	–	–	a
7	9	950	–	–	a
8	9	820	–	–	a
9	10	900	+	–	b
10	10	1000	+	+	a
11	10	920	+	–	b
12	10	1060	+	+	a
13	10	950	+	–	b
14	11	900	+	–	b
15	11	1200	+	+	a
16	11	1150	+	+	a
17	11	1000	+	+	a
18	12	1200	+	+	a
19	12	1100	+	+	a
20	12	1000	+	+	a

Как видно из приведенной формулы для расчета коэффициента Фехнера, величина этого показателя не зависит от величины отклонений факторного и результативного признака от соответствующей средней величины. Поэтому нельзя говорить о степени тесноты корреляционной связи, а тем более об оценке ее существенности на основании только коэффициента Фехнера. При малом объеме исходной информации коэффициент Фехнера практически решает ту же задачу, которая ставится при построении групповых и корреляционных таблиц, т.е. отвечает на вопрос о наличии и направлении корреляционной связи между признаками. В том случае, если построена корреляционная или же групповая таблица, дополнительный расчет коэффициента Фехнера не имеет практической ценности.

Более совершенным показателем степени тесноты связи является **линейный коэффициент корреляции (*r*).** Коэффициент корреляции был предложен английским математиком К. Пирсоном. При расчете этого показателя учитываются не только знаки отклонений индивидуальных значений признака от средней, но и сама величина таких отклонений, т.е. соответственно для факторного и результативного признаков величины $x_i - \bar{x}$ и $y_i - \bar{y}$. Однако непосредственно сопоставлять между собой полученные абсолютные величины нельзя, так как сами признаки могут быть выражены в разных единицах, а при наличии одних и тех же единиц измерения средние могут быть различны по величине. В этой связи сравнению могут подлежать отклонения, выраженные в относительных величинах, т.е. в долях среднего квадратического отклонения (их называют нормированными отклонениями). Так, для факторного признака будем иметь совокупность величин $t_{x_i} = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$, а для результативного $t_{y_i} = \dfrac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$.

Для того чтобы на основе сопоставления рассчитанных нормированных отклонений получить обобщающую характеристику степени тесноты связи между признаками для всей совокупности, рассчитывают среднее произведение нормированных отклонений. Полученная таким образом средняя и будет являться линейным коэффициентом корреляции *r*:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n} t_{x_i} t_{y_i}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma_x}\right)\cdot\left(\frac{y_i-\overline{y}}{\sigma_y}\right)}{n}, \tag{7.2}$$

или, поскольку σ_x и σ_y для данных рядов являются постоянными и могут быть вынесены за скобку, формула линейного коэффициента корреляции приобретает следующий вид:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{n\sigma_x\sigma_y}. \tag{7.2 а}$$

Вычисление коэффициента корреляции по этой формуле является достаточно трудоемкой операцией. Выполнив несложные преобразования, можно получить следующую формулу для расчета линейного коэффициента корреляции:

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(1\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}. \tag{7.2 б}$$

Линейный коэффициент корреляции может принимать любые значения в пределах от -1 до +1. Чем ближе коэффициент корреляции по абсолютной величине к 1, тем теснее связь между признаками. Знак при линейном коэффициенте корреляции указывает на направление связи: прямой зависимости соответствует знак плюс, а обратный зависимости – знак минус.

Если с увеличением значений факторного признака x результативный признак y имеет тенденцию к увеличению, то величина коэффициента корреляции будет находиться между 0 и 1. Если же с увеличением значений x результативный признак y имеет тенденцию к снижению, то коэффициент корреляции может принимать значения в интервале от 0 до -1.

Сама по себе величина коэффициента корреляции не является доказательством наличия причинно-следственной связи между исследуемыми признаками, а является оценкой степени взаимной согласованности в изменениях признаков. Установлению причинно-следственной зависимости предшествует анализ качественной природы явлений. Но есть и еще одно обстоятельство, объясняющее формулировку выводов о возможном наличии связи по величине коэффициента корреляции.

Оценка степени тесноты связи с помощью коэффициента корреляции производится, как правило, на основе более или менее ограниченной информации об изучаемом явлении. Возникает вопрос: насколько правомерно наше заключение по выборочным данным в отношении действительного наличия корреляционной связи в той генеральной совокупности, из которой была произведена выборка?

Принципиально возможны случаи, когда отклонение от нуля полученной величины выборочного коэффициента корреляции оказывается целиком обусловленным неизбежными случайными колебаниями тех выборочных данных, на основании которых он вычислен. Особенно осторожно следует подходить к истолкованию полученных коэффициентов корреляции при незначительных объемах выборочной совокупности.

В этой связи и возникает необходимость оценки существенности линейного коэффициента корреляции, дающая возможность распространить выводы по результатам выборки на генеральную совокупность. В зависимости от объема выборочной совокупности предлагаются различные методы оценки существенности линейного коэффициента корреляции. В отношении приводимых ниже критериев существенности можно сделать общее замечание, касающееся свойств исходной совокупности. Этим свойством является нормальное распределение значений признака в генеральной совокупности.

7.4. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Изучение корреляционных зависимостей основывается на исследовании таких связей между переменными, при которых значения одной переменной (ее можно принять за зависимую переменную) «в среднем» изменяются в зависимости от того, какие значения принимает другая переменная, рассматриваемая как причина по отношению к зависимой переменной. Действие данной причины осуществляется в условиях сложного взаимодействия различных факторов, вследствие чего проявления закономерности затемняются влиянием случайностей.

Вычисляя средние значения результативного призрака для данной группы значений признака-фактора, мы отчасти элиминируем влияние случайностей. Вычисляя параметры теоретической линии связи, мы производим дальнейшее их элиминирование и получаем однозначное (по форме) изменение y с изменением фактора x.

Теоретической линией регрессии называется та линия, вокруг которой группируются точки корреляционного поля и которая указывает основное направление, основную тенденцию связи. Теоретическая линия регрессии должна отображать изменение средних величин результативного признака y по мере изменения величин факторного признака x при условии полного взаимопогашения всех прочих – случайных по отношению к фактору x – причин. Следовательно, эта линия должна быть проведена так, чтобы сумма отклонений точек поля корреляции от соответствующих точек теоретической линии регрессии равнялась нулю, а сумма квадратов этих отклонении была бы минимальной величиной.

Важным этапом регрессионного анализа является определение типа функции, с помощью которой характеризуется зависимость между признаками. Главным основанием для выбора вида уравнения должен служить содержательный анализ природы изучаемой зависимости, ее механизма. Вместе с тем теоретически обосновать форму связи каждого из факторов с результативным показателем можно далеко не всегда, поскольку исследуемые социально-экономические явления очень сложны и факторы, формирующие их уровень, тесно переплетаются и взаимодействуют друг с другом. Поэтому на основе теоретического анализа нередко могут быть сделаны самые общие выводы относительно направления связи, возможности его изменения в исследуемой совокупности, правомерности использования линейной зависимости, возможного наличия экстремальных значений и т.п. Необходимым дополнением такого рода предположений должен быть анализ конкретных фактических данных.

Приблизительное представление о линии связи можно получить на основе эмпирической линии регрессии (или линии групповых средних). Эмпирическая линия обычно является ломаной линией, имеет более или менее значительный излом. Объясняется это тем, что влияние прочих неучтенных факторов, оказывающих воздействие на вариацию результативного признака, в средних погашается не полностью в силу недостаточно большого количества наблюдений. Поэтому эмпирической линией связи для выбора и обоснования типа теоретической кривой можно воспользоваться при условии, что число наблюдений будет достаточно велико.

Можно также использовать опыт предыдущих исследований и там, где выбранные формы уравнений связи давали удовлетворительный результат, рекомендовать их использовать и в дальнейшем.

Одним из элементов конкретных исследований является сопоставление различных уравнений зависимости, основанное на использовании критериев качества аппроксимации эмпирических данных конкурирующими вариантами моделей. Наиболее часто для характеристики связей экономических показателей используют следующие типы функций:

– линейную $\hat{y} = a + bx$;

– гиперболическую $\hat{y} = a + b\frac{1}{x}$;

– показательную $\hat{y} = ab^x$;

– параболическую $\hat{y} = a + bx + cx^2$;

– степенную $\hat{y} = ax^b$;

– логарифмическую $\hat{y} = a + b\lg x$;

– логистическую $\hat{y} = \frac{d}{1 + e^{a+bx}}$.

В рассматриваемом примере эмпирическая линия регрессии все же больше всего приближается к прямой, и, следовательно, теоретическая линия регрессии может быть представлена уравнением вида

$$\hat{y} = a + bx.$$

Для нахождения параметров a и b уравнения регрессии используем метод наименьших квадратов. При применении метода наименьших квадратов для нахождения такой функции, которая наилучшим образом соответствует эмпирическим данным, считается, что сумма квадратов отклонений эмпирических точек от теоретической линии регрессии должна быть величиной минимальной.

Применение метода наименьших квадратов для определения параметров a и b прямой, наиболее соответствующей эмпирическим данным, сводится к задаче на экстремум. Функция двух переменных $S(a,b)$ может достигнуть экстремума в том случае, когда первые частные производные этой функции равняются нулю.

Значение параметра a получим следующим образом:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Параметр b в уравнении называют **коэффициентом регрессии.** При наличии прямой корреляционной зависимости коэффициент регрессии имеет положительное значение, а в случае обратной зависимости коэффициент регрессии отрицательный.

Коэффициент регрессии показывает, на сколько в среднем изменяется величина результативного признака y при изменении факторного признака x на единицу. Геометрически коэффициент регрессии представляет собой наклон прямой линии, изображающей уравнение корреляционной зависимости, относительно оси x (для уравнения $\hat{y} = a + bx$).

Коэффициент регрессии применяют для определения **коэффициента эластичности,** который показывает, на сколько процентов изменится величина результативного признака y при изменении признака-фактора x на один процент. Для определения коэффициента эластичности используется формула

$$Э_x = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Зная линейный коэффициент корреляции, оценивающий степень тесноты связи между изменениями факторного и результативного признаков, можно определить коэффициент регрессии в уравнении $\hat{y} = a + bx$ по следующей формуле:

$$b = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения соответственно значений факторного и результативного признаков.

Наличие этого соотношения дает возможность производить вычисление коэффициента корреляции и параметров уравнения линейной регрессии одновременно.

Поскольку не все фактические значения результативного признака лежат на линии регрессии, более справедливо для записи уравнения корреляционной зависимости воспользоваться формулой $y = a + bx + e$, где e отражает случайную составляющую вариации результативного признака. Иногда рассеяние точек корреляционного поля настолько велико, что для принятия решений в управлении нет смысла пользоваться уравнением регрессии, так как погрешность в оценке анализируемого показателя будет чрезвычайно велика. Для всей совокупности наблюдаемых значений рассчитывается *средняя квадратическая ошибка уравнения регрессии* S_e, которая представляет собой среднее квадратическое отклонение фактических значений y_i относительно значений, рассчитанных по уравнению регрессии $\hat{y}_i$, т.е.

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n - m}}, \qquad (7.3)$$

где S_e – средняя квадратическая ошибка уравнения регрессии;

y_i – фактические значения результативного признака, полученные по данным наблюдения;

$\hat{y}_i$ – значения результативного признака, рассчитанные по уравнению корреляционной связи и полученные подстановкой значений факторного признака x_i в уравнение регрессии $\hat{y} = a + bx$;

m – число параметров в уравнении регрессии.

Упростим расчет средней квадратической ошибки уравнения. В результате получим следующее выражение для определения величины S_e в случае линейной зависимости между x и y:

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}}, \tag{7.4}$$

где a и b являются параметрами уравнения регрессии.

Средняя квадратическая ошибка уравнения дает нам возможность в каждом отдельном случае с определенной вероятностью указать, что величина результативного признака окажется в определенном интервале относительно значения, вычисленного по уравнению связи.

Средняя квадратическая (стандартная) ошибка коэффициента регрессии b определяется по формуле

$$S_b = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}} \tag{7.5}$$

или

$$S_b = \frac{S_e}{\sigma_x \sqrt{n}}, \tag{7.6}$$

где S_b – средняя квадратическая ошибка коэффициента регрессии b.

Средняя квадратическая ошибка параметра a уравнения регрессии определяется по формуле

$$S_a = \frac{S_e}{\sqrt{n}}, \tag{7.7}$$

где S_a – средняя квадратическая ошибка параметра a.

Величину средней квадратической ошибки уравнения можно использовать и при выборе той или иной функции в качестве уравнения регрессии.

Величина средней квадратической ошибки параболы S_e определится по формуле

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n} y_i^2 - a_0 \sum_{i}^{n} y_i - a_1 \sum_{i}^{n} x_i y_i - a_2 \sum_{i}^{n} x_i^2 y_i}{n-3}}. \qquad (7.8)$$

Сравнив значения средних квадратических ошибок уравнений прямой и параболы, можно отдать предпочтение уравнению прямой, поскольку величина S_e для этого уравнения регрессии является меньшей.

При практическом использовании уравнений регрессии следует помнить, что экстраполяция допускается только тогда, когда существенно не изменяются условия формирования уровней признаков, которые лежали в основе определения параметров уравнения регрессии. В противном случае использование уравнений для составления прогнозов должно быть отвергнуто. Необходим новый эмпирический материал, который отразит взаимосвязь между признаками в новых условиях с определенными качественными сдвигами.

7.5. МНОЖЕСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

На практике чаще всего изменение изучаемого признака зависит от действия нескольких причин. В таких случаях изучение корреляционной связи не может ограничиваться парными зависимостями и в анализ необходимо включить другие признаки-факторы, существенно влияющие на изучаемую зависимую переменную.

Одновременное изучение корреляции нескольких переменных проводится на основе использования методов множественной корреляции. Так, рассматривая уровень фондоотдачи на различных предприятиях одной отрасли, мы можем установить, что величина его зависит от размеров предприятия, удельного веса активной части фондов, степени изношенности фондов, их обновления и ряда других факторов.

Если обозначить факторы $x_1, x_2, x_3 ... x_m$, то линейное уравнение множественной зависимости может быть записано так:

$$\hat{y}_{x_1,x_2,...,x_m} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_mx_m. \qquad (7.9)$$

Рассчитав параметры уравнения множественной зависимости, определяем значение индекса корреляции по следующей формуле:

$$i = \sqrt{1 - \frac{S^2_{\hat{y}x_j}}{\sigma^2_y}}, \qquad (7.10)$$

где $S^2_{\hat{y}x_j}$ – дисперсия эмпирических значений относительно значений, рассчитанных по уравнению регрессии, которая определяется делением остаточной суммы квадратов отклонений результативного признака на (n-m-1);

σ^2_y – дисперсия эмпирических значений результативного признака.

По параметрам полученного уравнения можем оценить долю каждого из факторов в изменении уровня результативного показателя y. Это может быть сделано путем прямой оценки по величине коэффициентов регрессии при каждом из факторов, а также по коэффициентам эластичности $Э_{x_j}$, стандартизированным частным коэффициентам регрессии – β -коэффициентам и Δ -коэффициентам.

Коэффициенты уравнения множественной регрессии показывают абсолютный размер влияния факторов на уровень результативного показателя и характеризуют степень влияния каждого фактора на анализируемый показатель при фиксированном (среднем) уровне других факторов, входящих в модель.

Для сравнения оценок роли различных факторов в формировании моделируемого показателя следует дополнить абсолютные величины относительными. Так, частные коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется y с изменением признака-фактора x (на один процент при фиксированном положении других факторов), и рассчитываются по формуле

$$Э_j = b_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}, \tag{7.11}$$

где b_j – коэффициент регрессии при j-том факторе.

Коэффициенты показывают, на какую часть среднего квадратического отклонения σ_y изменится зависимая переменная y с изменением соответствующего фактора x на величину своего среднеквадратического отклонения (σ_j). Этот коэффициент позволяет сравнивать влияние колебаний различных факторов на вариацию исследуемого показателя, на основе чего выявляются факторы, в развитии которых заложены наибольшие резервы изменения результативного показателя:

$$\beta_j = b_j \frac{\sigma_j}{\sigma_y}. \tag{7.12}$$

Коэффициенты эластичности и β-коэффициенты взаимосвязаны следующим образом:

$$\beta_j = Э_j \cdot \frac{v_j}{v_y}, \tag{7.13}$$

где v_j – коэффициент вариации j-того факторного признака;

v_y – коэффициент вариации результативного признака.

Чтобы оценить долю влияния каждого фактора в суммарном влиянии факторов, включенных в уравнение регрессии, рассчитывают Δ-коэффициенты:

$$\Delta_j = \frac{r_{jy} \cdot \beta_j}{\sum_j r_{jy} \beta_j} = \frac{r_{jy} \cdot \beta_j}{R^2}. \tag{7.14}$$

Содержательный анализ моделей в целях уточнения приоритетности факторов опирается на сравнение перечисленных коэффициентов. В этих целях, особенно при достаточно большом числе факторов, включаемых в уравнение регрессии, производится ранжирование факторов по величине коэффициентов эластичности – β – и Δ-коэффициентов.

При построении многофакторных корреляционных моделей одной из предпосылок обоснованности конечных результатов является требование возможно меньшей коррелированности включенных в модель признаков-факторов (отсутствие мультиколлинеарности). В случае линейной зависимости между факторами система нормальных уравнений не будет иметь однозначного решения, в результате чего коэффициенты регрессии и другие оценки окажутся неустойчивыми. Кроме того, наличие взаимосвязи факторов затрудняет экономическую интерпретацию уравнения связи, так как изменение одного из факторов влечет за собой, как правило, изменение факторов, с ним связанных. Для исключения мультиколлинеарности было предложено несколько методов. На практике чаще всего используют чисто эмпирический подход к решению этой проблемы.

Рассмотрим матрицу парных коэффициентов корреляции (индекс «0» присвоен результативному признаку y), по которой можно оценить степень взаимной коррелированности признаков-факторов (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Оценка степени коррелированности

Факторы	Y	X_1	X_2	…	X_j	…	X_m
Y	1	r_{10}	r_{20}	…	r_{j0}	…	r_{m0}
X_1	r_{01}	1	r_{21}	…	r_{j1}	…	r_{m1}
X_2	r_{02}	r_{12}	1	…	r_{j2}	…	r_{m2}
…	…	…	…	…	…	…	…
X_j	r_{0j}	r_{1j}	r_{2j}	…	1	…	r_{mj}
…	…	…	…	…	…	…	…
X_m	r_{0m}	r_{1m}	r_{2m}	…	r_{jm}	…	1

В качестве критерия мультиколлинеарности может быть принято соблюдение следующих неравенств:

$$r_{x_j y} > r_{x_j x_k};$$

$$r_{x_k y} > r_{x_j x_k}.$$

Если приведенные неравенства (или хотя бы одно из них) не выполняются, то исключается тот фактор x_j или x_k, связь которого с результативным показателем y будет менее тесной. Вместе с тем окончательный вывод о наличии или отсутствии мультиколлинеарности должен быть сделан в соответствии с экономическим содержанием и логикой взаимосвязи конкретных факторов.

Величина совокупного коэффициента корреляции по значениям парных коэффициентов может быть определена следующим образом:

$$R^2 = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{10} & r_{20} & . & r_{m0} \\ r_{10} & 1 & r_{21} & . & r_{m1} \\ r_{20} & r_{12} & 1 & . & r_{m2} \\ . & . & . & . & . \\ r_{0m} & r_{1m} & r_{2m} & . & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{21} & . & r_{m1} \\ r_{12} & 1 & . & r_{m2} \\ . & . & . & . \\ r_{1m} & r_{2m} & . & 1 \end{vmatrix}}. \tag{7.15}$$

Величина $\mathbf{R^2}$, называемая еще **коэффициентом детерминации,** показывает, в какой мере вариация результативного признака обусловлена влиянием признаков-факторов, включенных в рассматриваемое уравнение корреляционной зависимости.

Величина совокупного коэффициента корреляции изменяется в пределах от *0* до *1* и численно не может быть меньше, чем любой из образующих его парных коэффициентов корреляций. Чем ближе совокупный коэффициент корреляции к единице, тем меньше роль неучтенных в модели факторов и тем больше оснований считать, что параметры регрессионной модели отражают степень эффективности включенных в нее факторов.

Для случая зависимости результативного признака от двух факторных признаков формула совокупного коэффициента корреляции имеет вид

$$R_{y_{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{r^2_{10} + r^2_{20} - 2 \cdot r_{10} r_{20} r_{12}}{1 - r_{12}^2}}. \tag{7.16}$$

Расчет параметров уравнения зависимости для такого варианта можно вести по формулам, в которых используются уже вычисленные значения парных коэффициентов корреляции и средних квадратических отклонений.

Так, для уравнения вида $\hat{y}_{x1x2} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ параметры b_0, b_1, b_2 могут быть найдены по следующим формулам:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_1} \cdot \frac{r_{10} - r_{20} \cdot r_{12}}{1 - r^2_{12}};$$

$$b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_2} \cdot \frac{r_{20} - r_{10} \cdot r_{12}}{1 - r^2_{12}}; \qquad (7.17)$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}_1 - b_2\overline{x}_2,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0$ – средние квадратические отклонения соответственно признаков x_1, x_2 и y;

r_{10}, r_{20}, r_{12} – парные коэффициенты корреляции.

Для более глубокого исследования связей между явлениями целесообразно установить степень тесноты связи между результативным признаком y и каждым из факторных признаков при исключении влияния других факторных признаков.

Для решения поставленной задачи определяют так называемые **коэффициенты частной корреляции,** выявляющие степень чистого влияния факторного признака на результативный признак. Для расчета частных коэффициентов корреляции могут быть использованы парные коэффициенты корреляции.

Для случая зависимости y от двух признаков можно вычислить два коэффициента частной корреляции:

а) частный коэффициент корреляции $r_{01,2}$ между результативным признаком y и фактором x_1 при элиминировании фактора x_2 показывает, какую часть колеблемость y, вызванная фактором x_1, составляет в колеблемости y под действием всех факторов, кроме фактора x_2:

$$r_{01.2} = \frac{r_{10} - r_{20}r_{12}}{\sqrt{\left(1 - r_{12}^2\right)\left(1 - r_{20}^2\right)}}; \qquad (7.18\ а)$$

б) второй частный коэффициент корреляции $r_{01,2}$ характеризует зависимость результативного признака от фактора x_2 при исключении влияния фактора x_1:

$$r_{02.1} = \frac{r_{20} - r_{10}r_{12}}{\sqrt{\left(1 - r_{10}^2\right)\left(1 - r_{12}^2\right)}}. \qquad (7.18\ б)$$

Для общего случая частные коэффициенты корреляции можно определить таким образом:

$$r_{0m.1,2,\ldots,m-1} = \sqrt{\frac{R^2{}_m - R^2{}_{m-1}}{1 - R^2{}_m}}, \qquad (7.18)$$

где R_m^2 – коэффициент детерминации результативного признака y с комплексом факторных признаков $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$;

R_{m-1}^2 – коэффициент детерминации результативного признака y с комплексом признаков $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$;

$r_{0m.1,2,\ldots,m-1}$ – частный коэффициент корреляции y с факторным признаком x_m при исключении влияния факторных признаков $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

При малых значениях $r_{0m.1,2,\ldots,m-1}$ нет смысла вводить в уравнение m-тый фактор, так как эффективность нового уравнения регрессии, характеризующего зависимость от m-факторов, возрастает незначительно.

Построение многофакторных регрессионных моделей позволяет дать количественное описание основных закономерностей изучаемых явлений, выделить существенные факторы, обусловливающие изменение экономических показателей, и оценить их влияние.

Полученные модели в основном используются в двух направлениях сравнительного анализа и в прогнозировании. Например, для выявления внутриотраслевых резервов повышения эффективности производства рассчитывается уравнение множественной зависимости, рассматриваемое в экономике в качестве статистической модели анализируемого показателя эффективности и характеризующее основные закономерности в формировании этого показателя для совокупности предприятий отрасли. На основе такого уравнения можно проанализировать и сравнить влияние каждого фактора на повышение эффективности в среднем по отрасли.

Разбив все предприятия на группы, различающиеся по условиям производства, определяемых организационно-техническим уровнем развития, можно с помощью модели соответствующего показателя эффективности сравнить результаты деятельности этих групп предприятий между собой и со средним отраслевым уровнем.

Процедура сравнительного анализа с использованием уравнений регрессии сводится к следующему. Для каждой группы предприятий, сформированных по организационно-техническому уровню развития, находятся не только средние значения показателей, характеризующих эффективность деятельности, но и показателей, определяющих уровень результативных (под ними понимаются признаки-факторы, включенные в соответствующую регрессионную модель). Затем проводится сравнение средних значений факторных признаков сопоставляемых групп предприятий и определяются величины $\Delta \bar{x}_{ij}$, где j – номер признака-фактора; i – номер группы. Умножая разности $\Delta \bar{x}_{ij}$, найденные по сравниваемым группам, на величину коэффициентов регрессии b_j в многофакторной регрессионной модели, получаем эффект влияния различий в уровнях факторов по группам (табл. 7.5). Величина полученного эффекта $\left(\Delta \bar{x}_{ij} \cdot b_j\right)$ позволяет судить о вкладе каждого фактора в изменение результативного показателя в данной группе по сравнению с другой группой. Рассмотрим в таблице процедуру сравнительного анализа, когда вся совокупность предприятий (единиц наблюдения) разбита на две группы.

Таблица 7.5

Общая схема сравнительного анализа с применением уравнений регрессии

Факторы	Средние значения факторов по группе:		Разность средних значений факторов (гр.2-гр.3)	Коэффициенты регрессии b_j	Эффект влияния на результативный показатель различий в средних уровнях факторов (гр.4-гр.5)
	I группа	II группа			
1	2	3	4	5	6
x_1	$\overline{x_{11}}$	$\overline{x_{12}}$	$\Delta\overline{x_1}$	b_1	$b_1 \Delta\overline{x_1}$
x_2	$\overline{x_{21}}$	$\overline{x_{22}}$	$\Delta\overline{x_2}$	b_2	$b_2 \Delta\overline{x_2}$
x_3	$\overline{x_{31}}$	$\overline{x_{32}}$	$\Delta\overline{x_3}$	b_3	$b_3 \Delta\overline{x_3}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_j	$\overline{x_{j1}}$	$\overline{x_{j2}}$	$\Delta\overline{x_j}$	b_j	$b_j \Delta\overline{x_j}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_m	$\overline{x_{m1}}$	$\overline{x_{m2}}$	$\Delta\overline{x_m}$	b_m	$b_m \Delta\overline{x_m}$
y	$\overline{y_1}$	$\overline{y_2}$	$\Delta\overline{y}$		$\sum_{j=1}^{m} b_j \Delta\overline{x}_j$

Общая величина различий значений результативного показателя $\Delta\overline{y} = \overline{y_1} - \overline{y_2}$ в определенной части обусловлена изменением признаков-факторов, включенных в уравнение регрессии. Размер этого влияния определяется величиной $\sum_{j=1}^{m} b_j \Delta\overline{x}_j$. Разность $(\Delta\overline{y} - \sum_{j=1}^{m} b_j \Delta\overline{x}_j)$ может быть объяснена влиянием прочих неучтенных факторов. Чем выше доля влияния включенных в уравнение регрессии факторов, тем большую значимость приобретает использование уравнения регрессии в управлении деятельностью исследуемой совокупности предприятий. По результатам такого сравнительного анализа можно дать объективную оценку возможностей повышения эффективности производства и выявить внутрихозяйственные резервы в целом по отрасли.

Применение регрессионных моделей в прогнозировании требует осторожности в тех случаях, когда мы сталкиваемся с выходом фактических значений факторных признаков за границы значений признаков, на основе которых было рассчитано уравнение регрессии. Необходима проверка возможности экстраполяции, связанная с оценкой неизменности общих условий формирования уровней признаков в совокупности.

Возможность широкого применения методов корреляционно-регрессионного анализа еще в недалеком прошлом сдерживалась высокой трудоемкостью необходимых расчетных процедур. Сегодня широкое распространение получили **пакеты прикладных программ** по статистике (Harvard graphics, Stat graf, Super Calle, Exel), ликвидировавшие эти ограничения. Однако роль исследователя остается чрезвычайно важной как на этапе предварительной подготовки массива исходной информации, так и на этапе содержательной интерпретации полученных уравнений регрессии и их практического применения. Прежде всего исследователь обосновывает наличие причинной зависимости между признаками-факторами и результативным признаком. При предварительном анализе массива фактических данных важно оценить однородность совокупности исследуемых единиц, проверить возможность наличия выделяющихся наблюдений, обосновать принципы группировки единиц по значениям факторного признака. По результатам такого анализа формируется информационный массив для расчёта показателей степени тесноты связи, а затем и параметров уравнения регрессии.

Целесообразны предварительная проверка гипотезы о линейности связи между факторным и результативным признаком до выбора математической формы уравнения регрессии и анализ матрицы парных коэффициентов корреляции. Все сказанное свидетельствует о необходимости выделения промежуточных этапов в последовательности обработки данных с помощью пакетов прикладных программ для внесения необходимых котировок в процесс обработки данных.

Контрольные вопросы

1. Объясните понятие «корреляционная связь».
2. Перечислите методы выявления наличия корреляционной связи между двумя признаками.
3. Чем определяется теснота корреляционной связи?
4. Дайте характеристику уравнению регрессии.
5. Каковы особенности множественной корреляции?

Словарь терминов

Факторный анализ – совокупность методов построения математических моделей, позволяющих восстановить предполагаемую структуру, лежащую в основе наблюдаемых данных, для описания в сжатом и интерпретируемом виде.

Функциональный анализ – методы и разделы функционального анализа, применяемые в различных вопросах математической экономики.

Корреляционный анализ – совокупность основанных на математической теории корреляции методов обнаружения корреляционной зависимости между случайными величинами или признаками.

Корреляция – величина, характеризующая взаимную зависимость двух случайных величин.

Коэффициент корреляции – показатель меры тесноты связи между зависимыми друг от друга статистическими величинами.

Регрессия – зависимость условного среднего значения результирующего показателя.

8. МОДЕЛИ РЫНКОВ

Цели изучения

Задача изучения представленного материала – ознакомиться с простейшими, а так же классическими моделями рынка, что определяет перечень следующих вопросов:

– модель распределения;
– модель обмена, цены;
– равновесие на рынке;
– равновесие на рынке с производством;
– рынок рабочей силы;
– рынок денег;
– рынок товаров.

Основные вопросы

Простейшие модели рынков. Модель распределения. Модель обмена, цены. Равновесие на рынке, теорема Дебре. Равновесие на рынке с производством.

Классические модели важнейших рынков. Рынок рабочей силы. Рынок денег. Рынок товаров.

Объединенная модель рынков. Равновесие спроса и предложения на рынке рабочей силы, на рынке денег, на рынке товаров.

8.1. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ РЫНКОВ

1. Модель распределения. Самой простой, начальной моделью рынка является следующая. Участники экономики, рынка, их всего m, хотят разделить между собой товары в количестве $\Omega = \Omega_1,...,\Omega_n$. При этом система предпочтений каждого участника задана на пространстве размерности $n \times m$ (n видов товара, m участников), т.е. каждого участника интересует распределение товаров по всей группе участников. Итак, *i*-тый участник (как и любой другой) сравнивает наборы векторов: $(X_1,...,X_m) \le (Y_1,...,Y_m)$, где X_i, Y_i – то, что достается *i*-

тому участнику. Конечно, предполагается, что $\sum_i X_i \sum_i Y_i = \Omega$. Искомое распределение должно быть оптимально по Парето.

Распределение $(X_1,...,X_m)$ допустимо, если $\sum_i X_i \le \Omega$. Распределение $(Z_1,...,Z_m)$ называется оптимальным по Парето, если, во-первых, оно допустимо, и, во-вторых, не существует допустимого распределения $(Y_1,...,Y_m)$, такого, что $(Z_1,...,Z_m) \le (Y_1,...,Y_m)$ для каждого $i = 1,...,m$, и хотя бы одно из этих неравенств-предпочтений – строгое.

Можно представить себе следующую ситуацию.

Участники рынка сидят перед богатством, которое им предстоит разделить. Ни у кого нет на это богатство никаких особенных прав. Они обсуждают, как это богатство разделить. Для начала обсуждается совершенно произвольное деление. Затем постепенно оно улучшается. Наконец, все признают, что лучшего варианта раздела не существует, и раздел совершается.

Чисто экономические соображения не дают однозначной рекомендации. Фактически экономист следит только за тем, чтобы не было разбазаривания. Затем на смену экономисту приходит политик, чтобы выбрать оптимум Парето, один из многих.

2. Модель обмена, цены. Рассмотрим ситуацию. Пусть m участников экономики имеют каждый уже какие-то наборы товаров. Это их частная собственность, охраняемая, кроме всего прочего, законом. Все они пришли в «Лужники», ходят по полю и присматриваются, как бы чего поменять (известно, что такие рынки вполне могут существовать в военное время, например.) При этом они законченные эгоисты, т.е. система предпочтений каждого замкнута только на себя, набор соседа их интересует только с прицелом на возможный обмен (в этом состоит одно из отличий от предыдущей модели). Денег нет, только натуральный обмен. Легко понять, что такие обмены могут оказаться чрезвычайно выгодными обеим сторонам. Классический пример самого А. Смита: дальнозоркий и близорукий имеют каждый не те очки, что надо, и в результате обмена получают для себя ценнейшие вещи.

Подчеркнем, что пока люди ходят и присматриваются, прицениваются, обговаривают условия обмена, самого обмена они пока не совершают. Происходит, таким образом, обмен информацией. При этом условия сделок, вообще говоря, меняются. Но вот к 17.00 все более-менее уже утряслось, условия сделок перестали меняться. Тогда совершаются все сделки, и люди расходятся.

Окончательное распределение опять оптимально по Парето, но, кроме того, ни для одного участника оно не хуже первоначального, ибо обмены совершаются только добровольно.

Пусть X_i было у i-того участника, а Z_i – окончательное распределение, тогда $X_i \leq Z_i$. Но это еще не все. Если есть коалиции, то они также могут влиять на обмены (простейший пример, когда в обменах участвуют члены одной семьи). Складывая вместе свои начальные ресурсы, члены коалиции могут реализовать для обмена любой набор товаров из всего суммарного запаса. Коалиция значительно расширяет возможности её членов для обмена. Если какой-то обмен окажется для коалиции невыгодным, то она участвовать в нем не будет и этот обмен не состоится. В таком случае говорят, что коалиция заблокировала этот обмен, а вместе с тем и некоторое распределение, которое имело шанс быть окончательным.

Можно определить ядро рынка (описанный рынок еще называют экономикой частной собственности).

Ядром экономики, рынка называется множество допустимых распределений, которые не блокируются никакой коалицией. По существу ядро представляет собой множество распределений, приемлемых для всех коалиций.

Теорема 1. Если предпочтения участников экономики непрерывны, то ядро не пусто, замкнуто и ограничено.

Теорема 2. Если предпочтения участников экономики непрерывны и перед обменом каждый участник имеет все товары (хотя бы и в небольшом количестве), т.е. $X_i > 0$, то конечные распределения существуют, т.е. ядро экономики не пусто; более того, допустимое распределение $(Z_1,...,Z_m)$ может быть конечным, если и только если найдутся неотрицательные числа $P=(p_1,...,p_n)$, не все равные нулю, и такие, что для всех $i=1,...,m$ $PX_i = PZ_i$ и для любого другого допустимого распределения $(Y_1,...,Y_m)$, если $PY_i \le PX_i$, то $Y_i \le Z_i$ для любого $i=1,...,m$.

3. Равновесие на рынке. Теорема Дебре. Продолжим рассмотрение этой модели. Ранее был изучен спрос потребителя, зависящий от цен P и дохода Q. В данной ситуации доход Q_i, которым располагает *i*-тый участник, есть PX_i, тем самым его спрос D^i есть фактически функция цен (которые могут быть пока неизвестны). Вектор суммарного спроса также есть функция цен: $D(P)=\sum_i D^i(P)$. В то же время предложение товаров фиксировано, ибо весь их запас Ω находится на руках у участников экономики и равен $\sum_i X_i$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию избыточного спроса $I(P)=D(P)-\Omega$. Ясно, что компонента $I_k(P)=D_k(P)-\Omega_k$ представляет собой превышение спроса на *k*-тый товар на всем рынке $D_k(P)$ над предложением Ω_k и равенство спроса и предложения на всем рынке, т.е. равновесие на рынке, выражается равенством $I(P)=0$ или $I_k(P)=0$ для всякого $k=1,...,n$.

Определение. Если вектор цен P^* удовлетворяет равенству $I(P^*)=0$, то он называется системой равновесных цен, а вектор $D^*=D(P^*)=D_1(P^*),...,D_n(P^*)$ – равновесным распределением.

Суммарный спрос на каждый товар равен предложению этого товара: $D_k(P)=\Omega_k$ для каждого $k=1,...,n$.

Ситуация равновесия. Первыми решили эту проблему А. Вальд в 1933-1936 гг. и Дж. фон Нейман в 1937 г. Но еще в 1874 г. Л. Вальрас несколько упростил задачу, сведя ее к решению нескольких обычных уравнений, причем число уравнений и число неизвестных оказались одинаковыми. Он же открыл закон, относящийся к рассматриваемой ситуации и носящий сейчас его имя.

Функция спроса зависит только от соотношения цен, а не от их абсолютных значений. Это замечание позволяет ввести в рассмотрение и деньги как некоторый особый, но в общем-то такой же товар, как и остальные.

Применяя закон Вальраса, получаем, что имеющееся на руках количество денег равно $M = \sum_k p_k I_k(P) + s$, где s – спрос на деньги. Если спрос s равен нулю, т.е. никто не хочет иметь деньги для их хранения или еще чего-нибудь долговременного, например, для трат вне рынка, то стоимость неудовлетворенного спроса в точности равна количеству денег на руках у участников рынка. Это и есть ситуация равновесия. Представьте, что вдруг «мешок» денег пропал («челнок» по рассеянности засунул его куда-то в своей палатке). Немедленно станет ощущаться дефицит денег, и их «цена» возрастет, т.е. упадут остальные деньги.

4. Равновесие на рынке с производством. Общие ресурсы $\Omega = (X_1,\ldots,X_m)$ с самого начала распределены между m участниками. Имеем r производственных единиц, каждая из которых характеризуется производственным множеством $\tau_k, k = 1,\ldots,r$. Общее производственное множество задается равенством $\tau = \tau_1 + \ldots + \tau_r$. При этом каждый производитель руководствуется двумя правилами:

1) правило управления: производитель максимизирует свою прибыль, т.е. в ответ на систему цен P он выбирает вектор T, максимизирующий прибыль PT, где T – выбранная им технология;

2) правило распределения прибыли: реализованная прибыль распределяется между участниками согласно фиксированным заранее коэффициентам: α_k^i – доля i-того участника в прибылях k-того производителя; конечно, $\sum \alpha_k^i = 1$ для каждого $k = 1,\ldots,r$.

Участники являются акционерами, а производитель не является, вообще говоря, каким-то конкретным участником. Это будет так, если все коэффициенты α_k^i для данного k равны нулю, кроме какого-нибудь одного, например, $\alpha_k^i = 1$; тогда j-тый участник есть владелец k-того производства.

Производители имеют свои собственные правила работы, которые предполагают знание системы цен на рынке, но не предполагают знания системы предпочтений других участников экономики.

Для i-того участника денежная сумма PX_i, являющаяся оценкой его начальных запасов товаров, пополняется дивидендами, получаемыми от различных производственных единиц, и в целом составит $PX_i + \sum \alpha_k^i PT_i$.

Каждый производитель максимизирует свою прибыль и отдает дивиденды акционерам; потребитель покупает то, что он предпочитает, и столько, за сколько он в состоянии заплатить.

В рассматриваемой модели также можно определить, что такое равновесное состояние, равновесные цены и доказать теорему о существовании равновесия. Однако эта теорема не гарантирует однозначности в действиях производителей и потребителей, что может привести к своеобразному дисбалансу действий участников экономики.

8.2. КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВАЖНЕЙШИХ РЫНКОВ

1. Рынок рабочей силы. В классической модели принимаются следующие аксиомы:

а) фирмы свободны при найме рабочей силы, т.е. могут свободно нанимать и увольнять рабочих;

б) при прочих равных условиях предельный продукт труда снижается по мере роста рабочей силы;

в) предложение рабочей силы возрастает с ростом реальной заработной платы.

Модель вполне можно рассмотреть на примере какой-нибудь типичной фирмы. Пусть $y = F(,L)$ – ее производственная функция, L – величина потребляемых фирмой трудовых ресурсов, т.е. рабочей силы. Предельный продукт труда есть $\partial F / \partial L$.

Условие «б» есть общее требование к производственным функциям и известно как закон убывающей отдачи труда:

$$\partial^2 F \big/ \partial^2 L < 0. \tag{8.1}$$

Из общей теории фирмы известно условие равновесия для фирмы по трудовым ресурсам:

$$v\left(\partial F \big/ \partial L\right) = p, \tag{8.2}$$

где v – цена производимой продукции,

p – ставка заработной платы.

Неформальное условие (8.2): если при данной величине L имеет место неравенство $v\left(\partial F \big/ \partial L\right) = p$, то выгодно нанять еще одного работника, так как цена дополнительного продукта, произведенного им, больше его зарплаты; если же верно противоположное неравенство, то надо сократить работника.

Вывод из условия (8.2): прибыль фирмы есть $W(,L) = vF(,L) - pL$. L есть спрос на рабочую силу со стороны производителей. Отношение p/v называется реальной заработной платой. Его экономический смысл – сколько единиц производимого товара может купить рабочий на свою зарплату. Спрос на рабочую силу падает с ростом реальной заработной платы.

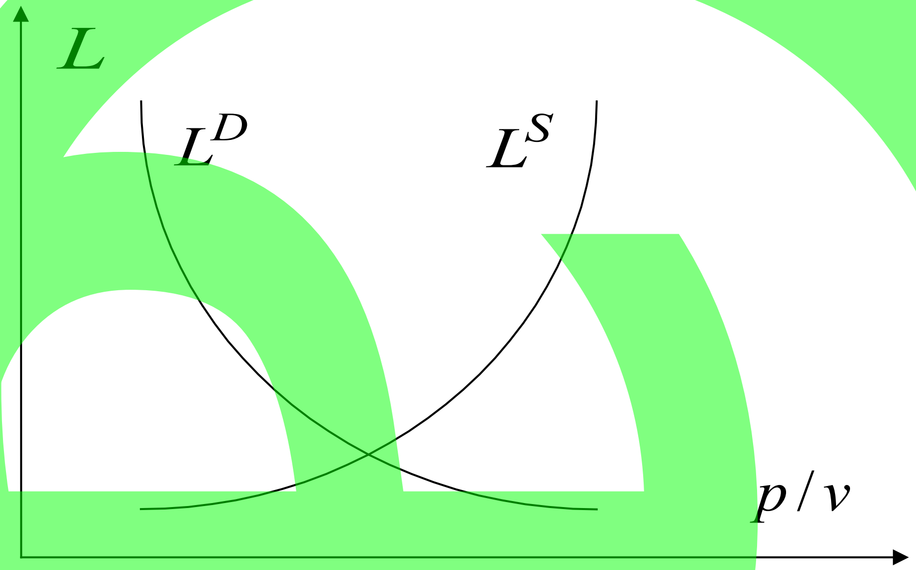

Рис. 8.1. Зависимость предложения и спроса от реальной заработной платы

Суммарный спрос L^D на рабочую силу и занятость – это, в сущности, одно и то же. Пусть L^S обозначает суммарное предложение рабочей силы. Примерные зависимости L^D и L^S от реальной заработной платы p/v показаны на рис. 8.1. Равновесие на рынке труда характеризуется равенством спроса L^D и предложения L^S. Пусть $(p/v)^*$ и L^* – соответственно реальная заработная плата и суммарный спрос на рабочую силу, т.е. занятость при равновесии.

Классическое объяснение устойчивости равновесного состояния таково. При превышении реальной заработной платы равновесной, т.е. при $p/v > (p/v)^*$, возникает избыточное предложение рабочей силы, что приводит к уменьшению предпринимателями заработной платы p и тем самым и реальной заработной платы p/v, т.е. происходит возврат к равновесию.

Если бы оказалось $p/v < (p/v)^*$, то уменьшилось бы предложение рабочей силы. Недостаток рабочей силы вынудил бы предпринимателей повысить заработную плату, а тем самым и реальную заработную плату $(p/v)^*$, т.е. произошел бы возврат к равновесию.

Из рис. 8.1 видно, что состояние равновесия единственно.

Замечание. Аксиома в модели рынка рабочей силы требует пояснения. Да, человек хочет получать за свой труд как можно большее вознаграждение. Но если он безработный и не может найти работу такую, какую хотел бы, то он вполне может согласиться работать за меньшую зарплату.

Безработица бывает нескольких видов.

Фрикционная безработица. Работник оказывается «между работами». Одни добровольно меняют работу, другие ищут новую работу из-за увольнения, третьи временно теряют сезонную работу (например, в строительстве с приближением зимы) и т.д.

Структурная безработица. С течением времени в экономике, обществе происходят изменения. Часть профессий постепенно отмирает, и работникам этих профессий надо их менять. Спрос на другие профессии увеличивается, и таких работников требуется все больше. Если вся безработица сводится к сумме указанных двух видов, то говорят о полной занятости.

В рассматриваемой классической модели колебания спроса и предложения рабочей силы нарушают полную занятость лишь в кратковременном аспекте – в период перехода к новому равновесию. Массовой длительной безработицы в этой модели не бывает. Однако этому положению классической модели упорно противоречил факт повторяющихся периодов длительной безработицы, особенно в годы «Великой депрессии» 1930-х гг. Это очевидное несоответствие классической модели реальности и послужило одним из источников кейнсианства.

2. Рынок денег. Согласно количественной теории денег спрос на них определяется формулой

$$M = kPY, \tag{8.3}$$

где Y – национальный продукт (все готовые товары и услуги, произведенные в экономической системе);

P – уровень цен (среднее взвешенное значение цен готовых товаров и услуг, выраженное относительно базового показателя, принятого за единицу);

k – некоторая постоянная.

Существует два варианта количественной теории денег. Один из них исходит из уравнения обмена Фишера $MV = PY$, где V – скорость обращения денег (сколько раз каждый рубль, доллар участвуют в расчетах в среднем за год), а M – требуемое количество денег для обслуживания расчетов, т.е. спрос на деньги выражается формулой $M = PY/V$. Таким образом, константа $k = 1/V$.

Из этого уравнения следует, что при прочих равных условиях:

– чем больше товаров и услуг, тем больше надо денег;

– чем выше цены, тем больше надо денег;

– чем быстрее обращаются деньги, тем их надо меньше.

Что касается предложения денег, то считается, что оно жестко регулируется государством, которое определяет его исходя часто из внеэкономических требований. Обозначим его M^S.

Равновесие на денежном рынке определяется равенством $M^D = M^S$. Один из постулатов классической денежной теории гласит, что денежный рынок всегда находится в равновесии, что денег всегда ровно столько, сколько нужно экономике. Из этого вытекают, например, следующие выводы:

– печатая деньги, правительство способствует повышению цен (ибо величины Y и V более инерционны, чем цены);

– принимая меры по убыстрению обращения денег, правительство способствует снижению цен (через увеличение скорости оборота, что не дает уменьшиться рентабельности).

Выше сформулированный постулат действует в определенных пределах: денег (ассигнаций, монет) все же должно быть физически достаточно много.

В варианте количественной теории денег, связанной с именем А. Маршалла и кембриджской школой, вместо скорости обращения V используется другое понятие – предпочтение ликвидности. В этом варианте константа k есть доля собственно денег как наиболее ликвидных финансовых активов, которые население предпочитает иметь (в роли других финансовых активов выступают чеки, аккредитивы, вклады в банках и т.п.). Эта доля определяется удобствами иметь именно деньги для оплаты покупок, услуг и т.п. С другой стороны, деньги не приносят дополнительного дохода, как другие финансовые активы (акции, облигации, вклады в банках и т.п.).

Изменяя норму процента, правительство (Центральный банк) может воздействовать на величину k – с увеличением нормы процента уменьшается k, и наоборот.

3. Рынок товаров. Под товарами понимаются потребительские и инвестиционные товары. На первые предъявляют спрос в основном домашние хозяйства, а также многие фирмы. На вторые предъявляют спрос в основном фирмы, расширяющие производство и услуги. Таким образом, суммарный спрос на товары есть сумма спроса на потребительские C и инвестиционные I товары.

В классической модели действует так называемый закон Сея. Этот закон воплощает исключительно простую идею о том, что сам процесс производства товаров создает доход, в точности равный стоимости произведенных товаров. Если кратко, то предложение создает спрос. Отсюда вытекает, что национальный доход Y должен быть равен объему национальных расходов E: $Y = E$.

Но E есть сумма расходов домашних хозяйств и фирм на потребление C и расходов фирм в форме инвестиций I.

Национальный доход тоже подразделяется на потребление C и сбережение S. Отсюда получаем условие равновесия на рынке товаров: $I = S$, т.е. спрос на инвестиции должен обеспечиваться объемом сбережений.

При прочих равных условиях спрос на потребительские и инвестиционные товары зависит от нормы процента $r - C(r), I(r)$, а именно, каждый спрос убывает с ростом r.

Чем больше r, тем выгоднее сберегать, а не расходовать свой доход на потребление. Верно и обратное: чем менее r, тем меньше смысла сберегать и все большая часть дохода может быть направлена на потребление.

Любой проект, требующий инвестиций, оценивается по его приведенной стоимости – все будущие расходы и доходы по нему дисконтируются к сегодняшнему моменту.

Чем больше r, тем меньшей сегодня будет оценена будущая прибыль от проекта. Проект, который считался выгодным, может не оказаться таковым при повышении нормы процента и в итоге будет отвергнут инвестором, т.е. не куплен им как инвестиционный товар.

С другой стороны, объем сбережений зависит от многих факторов, и не только от нормы процента, но и от уровня занятости.

Рынок обладает некоторой способностью к устойчивости своего состояния равновесия. Например, при понижении нормы процента увеличивается потребление как обычных товаров, так и инвестиционных.

Но это способствует большей занятости, а значит, большему предложению товаров. Наоборот, при повышении нормы процента потребление уменьшается, это влечет уменьшение занятости и в конечном итоге ведет к уменьшению предложения товаров.

Государство (в лице Центрального банка) может регулировать норму процента r, тем самым воздействуя на рынок товаров.

8.3. ОБЪЕДИНЕННАЯ МОДЕЛЬ РЫНКОВ

Суммируем описание всех трех рынков.

Рынок рабочей силы. Спрос $L^D = L^D(p/v)$, предложение $L^S = L^S(p/v)$, равновесие $L^D((p/v)^*) = L^S((p/v)^*) = L^*$.

Рынок денег. Спрос $M^D = PY/V$, предложение $M^S = const$, равновесие $PY/V = M^D = M^S$.

Рынок товаров. Спрос $C = C(r), I = I(r)$, объем сбережений $S = S(r, L)$, равновесие $I = S$.

Каждый из рынков характеризуется своими кривыми спроса и предложения и точками равновесия. Все три рынка связаны друг с другом. Стоит одному из них выйти из равновесия, как это скажется на других. Например, пусть правительство напечатает больше денег. Денежный рынок очень быстро отреагирует на это повышением цен, а на рынке товаров коммерческое банки повысят норму процента, иначе денежный поток к ним уменьшится. На рынке рабочей силы через повысившиеся цены произойдет уменьшение реальной заработной платы, и если предприниматели не примут мер к ее повышению, то уменьшится предложение рабочей силы.

Контрольные вопросы

1. Объясните экономический смысл модели распределения.
2. Сформулируйте теорему модели распределения.
3. Докажите, что существует равновесие на рынке.
4. Какими правилами руководствуется производитель для достижения равновесия на рынке с производством?
5. Поясните классическую модель рынка – рынок рабочей силы.
6. Проанализируйте модель рынка денег и рынка товаров.
7. В чем заключается сущность объединенной модели рынков?

Словарь терминов

Рынок – основная форма организации общественного хозяйства в условиях товарного производства, обеспечивающая взаимодействие между производством и потреблением, распределением ресурсов в интересах его участников – собственников этих ресурсов.

Рынок рабочей силы – сфера формирования спроса и предложения на рабочую силу.

Рынок денег – сфера формирования спроса и предложения на деньги.

Рынок товаров – сфера обмена, где через взаимодействие спроса и предложения формируются цены на товары и происходят товарообменные и товарно-денежные операции, соединяющие продавцов и покупателей.

Равновесие на рынке – состояние, для которого характерны сбалансированность и пропорциональность взаимосвязанных экономических процессов и отсутствие у экономических агентов и рынков в целом побудительных причин к изменению существующего положения.

9. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ПРОСТЕЙШИХ РЫНКАХ

Цели изучения

Ознакомиться с простейшими моделями рынка, а также с моделями экономического взаимодействия, действующими на простейших рынка. Изучение раздела приведет к пониманию следующих тем:

– спрос и предложение;
– содержание спроса и предложения на рынке одного товара;
– работа при условии наличия двух фирм на рынке одного товара;
– угрозы и торги при взаимодействии двух фирм.

Основные вопросы

Спрос и предложение на рынке одного товара. Рынок. Спрос и его график. Аксиома спроса. Эластичность спроса. Производная функция спроса. Аксиома предложения. Эластичность предложения. Производная функция предложения. Теорема спроса и предложения.

Условия работы двух фирм на рынке одного товара. Рассмотрение двух фирм. Товар и рынок. Цена на произведенный товар. Прибыль от реализации произведенного товара.

Угрозы и торги при взаимодействии двух фирм. Стратегия Стакельберга.

9.1. СПРОС И ПРЕДЛОЖЕНИЕ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

Потребители, желающие купить товары или услуги, и продавцы (поставщики) этих товаров и услуг встречаются на рынке. Рынок – это механизм, сводящий их вместе. Здесь, на рынке, покупатели ищут необходимый им товар и желают купить его дешевле, нужного качества и т.д.; они реализуют свою функцию спроса. Продавцы же озабочены сбытом своей продукции и получением прибыли.

Спрос изображается в виде графика, показывающего количество продукта, которое потребители готовы и в состоянии купить по некоторой цене из возможных в течение определенного периода времени цен.

Речь идет о функции, зависимости количества покупаемого товара от цены. Не о какой-то одноразовой покупке, а о потоке товара, уносимого с рынка покупателями. Допустим, на этой неделе цена товара p и ежедневно покупатели покупают D единиц товара, на следующей неделе цена станет p' и ежедневно покупатели будут уносить с рынка D' единиц товара.

Обозначим $D(p)$ количество товара, покупаемого на данном рынке за единицу времени при цене p за единицу товара. Функция $D(p)$ называется функцией спроса, или просто спросом. Согласно этой функции величина спроса – разная при разных ценах. Цены товаров всегда считаем положительными. Фундаментальное свойство функции спроса выражает следующая аксиома.

Аксиома спроса. Функция спроса является убывающей: при увеличении цены величина спроса на товар уменьшается до нуля, при уменьшении цены величина спроса увеличивается.

Экономисты предлагают разные объяснения этой аксиоме, для нас же достаточно её самой.

Будем использовать следующие функции спроса:

а) линейно убывающая $D(p) = a - bp; \quad 0 < p < a/b; \quad a,b > 0$ (рис. 9.1);

б) обратная $D(p) = 1/p; \quad p > 0$ (рис. 9.2);

в) логарифмическая $D(p) = \ln((1+p)/p); \quad p > 0$.

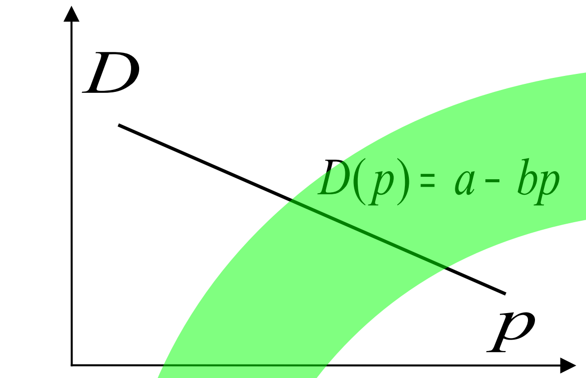

Рис. 9.1. Линейная функция спроса

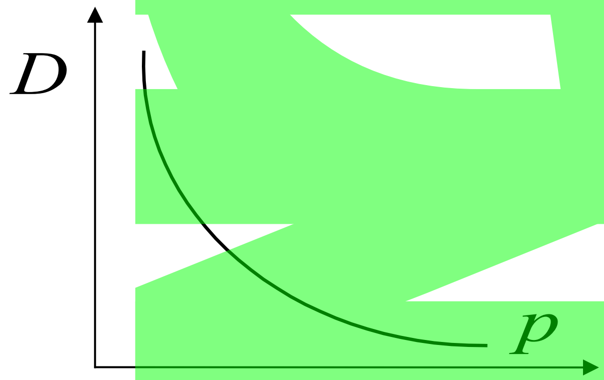

Рис. 9.2. Обратная (логарифмическая) функция спроса

При изменении условий на рынке или вне его функция спроса может измениться, тогда говорят об изменении спроса. Изменение спроса надо отличать от изменения величины спроса при передвижении по графику данной функции спроса. При повышении цен на бензин вполне может повыситься спрос на велосипеды. Это означает, что вся кривая спроса (её график) передвинется вправо.

Рассмотрим математические характеристики кривой спроса и их экономические иллюстрации.

Производная функция спроса по цене $D'(p) = dD/dp$ показывает (приблизительно), на сколько изменится величина спроса при изменении цены товара p на 1 единицу. Так как функция спроса предполагается убывающей, $D'(p) < 0$.

Эластичность спроса по цене показывает, на сколько процентов изменится величина спроса при изменении цены товара p на 1%. Обозначается эластичность E_p^D, она равна $D(p)/(D(p)/p)$.

Под предложением товара понимается функция – зависимость количества поставляемого на рынок товара от цены, сложившейся на рынке. Речь идет о потоке товара, поставляемого на рынок продавцами. На этой неделе цена товара p и ежедневно продавцы поставляют S единиц товара. На следующей неделе цена станет p' и ежедневно продавцы будут поставлять на рынок S' единиц товара.

Обозначим $S(p)$ количество товара, поставляемого на данный рынок за единицу времени при цене p за единицу товара. Функция $S(p)$ называется функцией предложения, или просто предложением. Согласно этой функции величина предложения разная при разных ценах. Фундаментальное свойство функции предложения выражает следующая аксиома.

Аксиома предложения. Функция предложения является возрастающей: при увеличении цены величина предложения товара неограниченно увеличивается, при уменьшении цены величина предложения уменьшается, приближаясь к нулю.

В дальнейшем будем использовать следующие функции предложения:

а) линейно возрастающая $S(p) = -c - dp; \;\; c/d < p; \;\; c,d > 0$ (рис. 9.3);

б) степенная $S(p) = p^{\alpha}; \;\; 0 < p; \;\; \alpha > 0$ (рис. 9.4);

в) логарифмическая $D(p) = \ln(1+p)$ (рис. 9.5).

При изменении условий на рынке или вне его функция

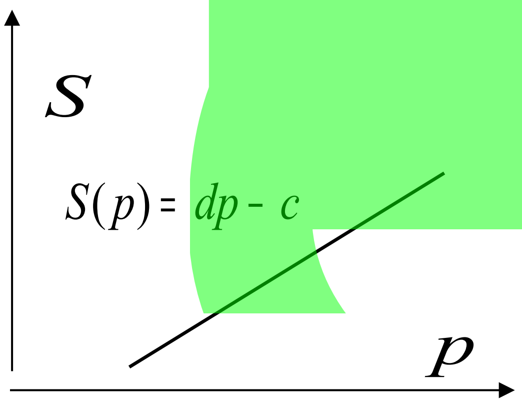

Рис. 9.3. Линейная функция предложения

предложения может измениться, тогда говорят об изменении предложения. Например, при открытии поблизости месторождения алмазов может увеличиться предложение обработанных алмазов, а возможно, через некоторое время и ювелирных украшений.

Производная функция предложения по цене $S'(p) = dS/dp$. показывает приблизительно, насколько изменится величина предложения при изменении цены товара p на 1 единицу. Так как функция предложения товара предполагается возрастающей, то $S'(p) > 0$.

Эластичность предложения по цене показывает, на сколько процентов изменится величина предложения при изменении цены товара на 1%. Обозначается эластичность E_p^S и равна $S'(p)/(S(p)/p)$.

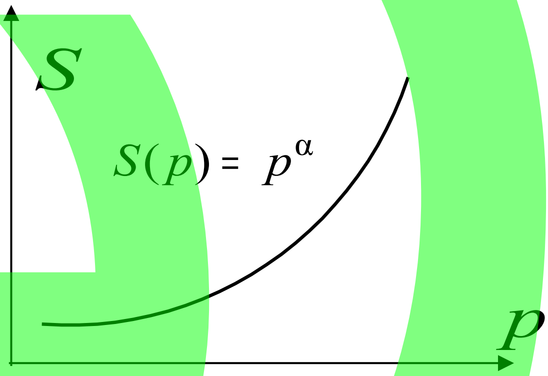

Рис. 9.4. Степенная функция предложения

Состояние рынка, при котором спрос равен предложению, называется равновесным, а цена, при которой достигается равенство спроса и предложения, называется равновесной ценой.

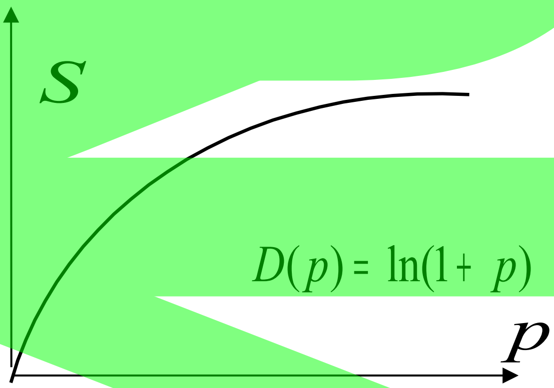

Рис. 9.5. Логарифмическая функция предложения

Теорема. Пусть функции спроса и предложения непрерывны и $D(p_0) > S(p_0)$ при некоторой цене p_0; тогда существует состояние равновесия.

Доказательство. Так как при $p \to \infty$ $D(p)$ убывает к нулю, а $S(p)$ неограниченно возрастает, то $D(p') < S(p')$ при некотором $p' > p_0$. Величина неудовлетворенного спроса $Z(p) = D(p) - S(p)$ принимает на концах отрезка $[p_0, p']$ значения разного знака, а так как она непрерывна, то по теореме Больцано-Коши найдется точка p^*

отрезка $[p_0, p']$, в которой она равна нулю, т.е. $D(p^*) = S(p^*)$. Параметры равновесия снабжают знаком «*»: p^*, $D^* = D(p^*) = S(p^*) = S^*$. Обычно саму тройку $\left(D^*, p^*, S^*\right)$ также называют равновесием.

9.2. УСЛОВИЯ РАБОТЫ ДВУХ ФИРМ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

Рассмотрим две фирмы $(i = 1,2)$, выпускающие один и тот же товар. Пусть затраты i-той фирмы при выпуске x_i равны $\alpha_i x_i$ (таким образом, α_i есть себестоимость выпуска одной единицы товара). Произведенный обеими фирмами товар поступает на общий рынок. Цена на товар линейно падает в зависимости от поступающего на рынок общего его количества $x = x_1 + x_2$, т.е. $p(x) = c - bx; \quad c, b > 0$.

Следовательно, прибыль i-той фирмы

$W_i(x_1, x_2) = x_i(c - bx) - \alpha_i x_i = bx_i(d_i - (x_1 + x_2))$, где $d_i = (c - \alpha_i)/b$.

Поведение каждой фирмы определяется ее стремлением максимизировать свою прибыль.

Допустим, что первая фирма узнала стратегию второй, т.е. объем ее выпуска x_2. Тогда она выбрала бы свой выпуск из условия максимизации прибыли: $\partial W_1/\partial = b(d_1 - (x_1 + x_2)) - bx_1 = 0$, т.е. $x_1^* = (d_1 - x_2)/2$.

Аналогично действовала бы вторая фирма, т.е. выбрала бы свой выпуск в объеме $x_2^* = (d_2 - x_1)/2$.

9.3. УГРОЗЫ И ТОРГИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ФИРМ

Стратегия Стакельберга. Одна из фирм сознательно раскрывает свою стратегию – дает возможность другой узнать свой ход, тогда вторая фирма ответит оптимальным для нее образом. Первая фирма будет действовать исходя именно из поведения второй фирмы. Прежде чем довести до сведения второй фирмы свой ход, первая просчитает этот свой ход исходя из максимизации прибыли, откуда и получаем точку Стакельберга. В стратегии Стакельберга первая фирма находится явно в более выгодной ситуации – ее прибыль в два раза больше. Возможно, вторая фирма не захочет с этим согласиться. Но все, что она сможет сделать, – это изменить как-нибудь свой выпуск. Однако при этом ее прибыль только лишь уменьшится. Однако уменьшится прибыль и первой фирмы. Если первая фирма забеспокоится, то возможен разумный торг. Однако если первая фирма более мощная, то она может сознательно пойти на уменьшение своей прибыли, продолжая выпускать $d/2$ в надежде, что уменьшение прибыли второй фирмы «образумит» ее, т.е. заставит вернуться к выпуску $d/4$. Первая фирма во всех ситуациях получает прибыль. Есть ли возможность получить большую прибыль? Если первая фирма более мощная, чем вторая, то она может навязать второй стратегию Стакельберга, а затем предложить перейти к выпускам по $d/4$. При этом ее прибыль станет прежней – $bd^2/8$, но прибыль второй фирмы увеличится с $bd^2/16$ до $bd^2/8$. Поэтому является разумным предложить второй фирме разделить этот излишек $bd^2/16$ между обеими фирмами, тем самым прибыль первой фирмы превысит $bd^2/8$.

Контрольные вопросы

1. Как принимаются решения в экономической рыночной системе?
2. Рассмотрите условия принятия решения при приобретении товара. Какие их них удовлетворяют и какие не удовлетворяют требованиям потребителя?
3. На рынке два продавца и один покупатель. Рассмотрите возможные варианты и способы их взаимодействия.

Словарь терминов

Рынок – основная форма организации общественного хозяйства в условиях товарного производства, обеспечивающая взаимодействие между производством и потреблением, распределение ресурсов в интересах его участников – собственников этих ресурсов.

Спрос – одна из важнейших категорий рыночной экономики, выражающая платежеспособную потребность в благах (товарах, услугах), представленных на рынке, т.е. количество товаров и услуг, которые потребители согласны купить по определенным ценам в определенный период времени.

Эластичность спроса и предложения – экономический показатель, характеризующий реакцию, соответственно, спроса и предложения на изменения цен, доходов и некоторых других факторов.

Товар – продукт производственно-экономической деятельности, выраженный в материально-вещественной форме и предназначенный для обмена (продажи) на основе общественного разделения труда.

Прибыль – разница между доходами, полученными от реализации продукции, основных средств и иного имущества, выполненных работ, оказанных услуг, внереализационной деятельности, и начисленной суммой затрат на производство, реализацию продукции и осуществление других видов деятельности.

10. МОДЕЛЬ ДЕНЕЖНОГО ОБРАЩЕНИЯ

Цели изучения

Основная задача изучения представленного материала состоит в следующем:

- получить представление о кругообороте товаров и денег на основе модели;
- научиться вычислению простых и сложных процентов;
- получить представление о рыночной цене акций и облигаций;
- ознакомиться с нахождением нормы процента и понятием «инфляция».

Основные вопросы

Основной кругооборот товаров и денег. Национальный продукт. Национальный доход. Ресурсы. Уравнение обмена Фишера.

Простые и сложные проценты. Процентная ставка. Темп инфляции. Норма процента. Простая процентная ставка. Сложная процентная ставка.

Рыночная цена акций и облигаций. Акция. Облигация. Расчет цены акции. Расчет цены облигации. Опцион. Фьючерс. Фьючерсные контракты.

Норма процента и инфляция. Процент. Норма процента. Инфляция. Модель обмена. Масса обращающихся денег.

10.1. НАЧАЛО ДЕНЕЖНОГО ОБРАЩЕНИЯ

В современной экономике одним из важнейших элементов являются деньги. При рассмотрении модели обмена, когда процессы натурального обмена приводят к выработке системы равновесных цен, можно почувствовать фундаментальную роль денег.

Фирмы продают произведенные ими товары семейным хозяйствам и покупают необходимые им рабочую силу, природные ресурсы.

Национальный продукт – это все готовые товары и услуги, произведенные в экономической системе.

Национальный доход – это все выплаты, полученные домашними хозяйствами: заработная плата, рента, прибыль. Национальный продукт в стоимостном выражении и национальный доход численно равны. На показанном кругообороте (рис. 10.1) товары движутся по часовой стрелке, а деньги – против часовой стрелки. Представим себе, что они движутся по трубам. Пусть M – это статическое количество денег; V – скорость их обращения; Y – национальный продукт или доход; P ; уровень цен. Связывая все эти величины, получим уравнение денежного обращения – основное уравнение классической количественной теории денег, так называемое уравнение обмена Фишера: $MV = PY$.

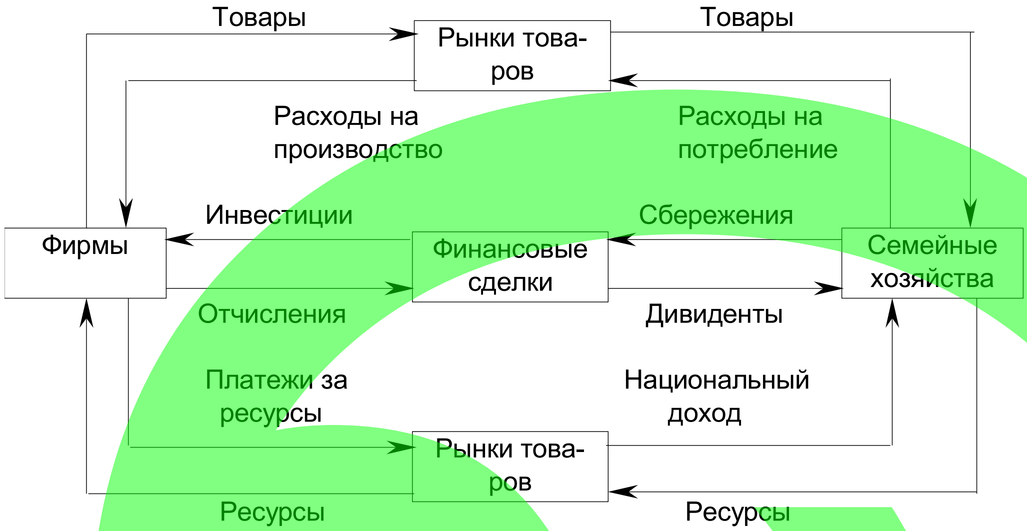

Рис. 10.1. Основной кругооборот товаров и денег

10.2. ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ. НАРАЩЕННЫЕ И ДИСКОНТИРОВАННЫЕ СУММЫ

В современной высокоразвитой экономике денежное обращение является отражением обращения товаров и ресурсов. Существуют финансовые рынки, регулирующие потоки денег и других ценных бумаг.

Семейные хозяйства не все свои расходы тратят на потребление. Остаток дохода представляет собой сбережения. На финансовых рынках эти сбережения покупаются фирмами или посредниками, например инвестиционными фондами, и превращаются в инвестиции.

Кроме денег на финансовых рынках обращаются и их всевозможные заменители, называемые ценными бумагами. Как для операций с деньгами и с ценными бумагами, так и для общего макроэкономического анализа фундаментальную роль играет норма процента, или *процентная ставка.*

Деньги и другие ценные бумаги представляют собой ресурс, весьма удобный, который можно использовать для разных целей. Но за использование ресурса надо платить. Норма процента как раз и определяет величину платы заемщика держателю финансов: если норма процента есть r процентов в год, то, дав в долг сумму A, держатель денег должен через год получить сумму на r большую, т.е. $A(1+r/100)$.

Другой важнейший макропоказатель экономики и ее финансового состояния – это темп инфляции, или просто *инфляция.* Говорят, что инфляция составляет α процентов в год, если один и тот же набор товаров через год будет стоить на α процентов больше.

Указанные два макропоказателя определяют общую финансовую и экономическую ситуацию в государстве. При различных соотношениях между этими показателями финансовые потоки сильно меняются. Эти же два показателя используются в финансовых расчетах, связанных со временем.

Норма процента порождает процентные ставки – простые и сложные.

При простой процентной ставке r сумма A каждый год нарастает на r процентов от A и через n лет составит $S_n = A(1+nr/100)$.

При сложной процентной ставке r сумма каждый год нарастает на r процентов от уже наращенного значения и через n лет составит $S_n = A(1+r/100)^n$.

В дальнейшем под процентной ставкой понимается сложная процентная ставка: r процентов в год.

Различают две основные задачи в связи с процентной ставкой.

1. Прямая. В какую сумму превратится сумма A через n лет? Ответ уже известен: $S_n = A(1+r/100)^n$.

2. Обратная. Какой сегодняшней сумме A эквивалентна сумма S, которую получим через n лет? Имеем: $S_n = A(1+r/100)^n$, откуда $A = S_n/(1+r/100)^n$.

В этих двух основных задачах проявляется фундаментальная роль времени в финансовых, коммерческих расчетах и вообще в экономике.

В любой экономике, где деньги играют подобающую им роль, каждый ее участник должен уметь решать указанную задачу хотя бы в простейших вариантах: и руководитель государства, правительства и фирмы, и менеджер, и обычный гражданин. Ведь все имеют дело с различными коммерческими и финансовыми операциями: берут и отдают ссуды, покупают что-то в рассрочку, покупают облигации, акции и продают их – это делают обычные рядовые граждане. Менеджеры и другие руководители берут кредиты, выпускают, покупают и продают пакеты облигаций и акций, заключают фьючерсные контракты и т.п.

10.3. РЫНОЧНАЯ ЦЕНА АКЦИЙ И ОБЛИГАЦИЙ

Рассмотрим несколько несложных расчетов с ценными бумагами.

Пример 1. Гражданин имеет облигацию номиналом 10 000 руб. с ежегодными выплатами 5%. Облигация бессрочная. Как оценить сегодняшний эквивалент всего его будущего дохода от этой облигации, если норма процента 3% в год?

Решение. 5% от 10 000 руб. составляет 500 руб. Эти 500 руб., которые гражданин получит через n лет, эквивалентны сегодня сумме $500(1+3/100)^n$, следовательно, сегодняшний эквивалент всего будущего дохода от облигаций (очередная выплата будет на днях) $\sum_{n=0}^{\infty} 500/(1+3/100)^n = 500 \bullet 103/3 \approx 1716$.

Итак, рыночная цена облигации будет 17 166 руб., а ее курс, т.е. отношение рыночной цены к номиналу, есть 1,72.

Пример 2. Гражданин получил от своего должника вексель на 100 000 руб., однако он нуждался в деньгах и понес вексель в банк. Что произойдет в банке?

Решение. Для банка это рядовая операция, называемая учетом векселя. Банк сейчас заплатит гражданину какую-то сумму, а потом, когда подойдет срок оплаты векселя, банк получит с должника все 100 000 руб. Допустим, что срок платы векселя – ровно через год. Тогда при норме процента r в год банк должен был бы заплатить гражданину сумму S из расчета $S(1+r/100)=100000$, т.е. при $r=5\%$, 95 240 руб. Но банки немного хитрят и удерживают r с конечной суммы 100000 руб. и потому заплатят гражданину 95000 руб.

Опционы и фьючерсные контракты Фундаментальная роль времени в денежном обращении в экономике проявляется в чрезвычайно важном положении: в выигрыше должны оставаться те участники экономики, кто правильно сумел предугадать, предвидеть будущее.

Развитые общества все больше ценят стабильность в экономике и в жизни общества. Необходимость в стабильности усилилась после Великой депрессии 1929-1938 гг. В силу этого появились разнообразные фьючерсные контракты, т.е. контракты, заключаемые сегодня и исходя из сегодняшней обстановки и прогнозов на будущее, но со сроком исполнения в будущем. Такого рода контракты, несомненно, вносят заметный вклад в стабильное развитие экономики, так как участники таких контрактов стараются сделать так, чтобы будущее, заложенное в них, осуществилось. Фьючерсные контракты похожи на маяки для участников экономики.

В целях все большей стабильности финансисты не любят риск и используют различные приемы для уменьшения риска. Например, применяют страхование результатов финансовых операций, но прямое страхование в таких ситуациях используется редко.

10.4. НОРМА ПРОЦЕНТА И ИНФЛЯЦИЯ

Пусть норма процента r в год, а инфляция α в год. Тогда через год сумма S возрастет на r процентов из-за наращения по норме процента, но сумма будет обладать в $(1+\alpha/100)$ раз меньшей покупательной способностью, следовательно, ее реальное денежное содержание

$$S(1+r/100)/(1+\alpha/100)=S(100+r)/(100+\alpha).$$

Отсюда следует простой вывод: реальное денежное содержание суммы возрастет, если $r>\alpha$; неизменно, если $r=\alpha$; уменьшится, если $r<\alpha$.

Если $\alpha \to \min$ (мало), то $1/(1+\alpha/100) \approx 1-\alpha/100$, т.е. инфляция уменьшает сумму на α процентов в год. Следовательно, реальное содержание суммы S через год будет

$$S(1+r/100)/(1+\alpha/100) \approx S(1+(r-\alpha)/100-r\alpha/10000).$$

Пренебрегая $r\alpha/10000 \approx 0$ из-за его малости, получаем $S(1+(r-\alpha)/100)$.

При малой инфляции скорость роста реального денежного содержания суммы равна разности между нормой процента и инфляции, т.е. инфляция как бы уменьшает норму процента.

Модели денежного обращения. $MV = PY$ – модель денежного обращения. Эта модель относится к основополагающим макроэкономическим отношениям монетаристской теории.

Будучи количественным соотношением, данная модель связывает такие важнейшие макроэкономические показатели, как масса денег в обращении и скорость обращения денег, стоящие в левой части уравнения, с величиной годового объема чистого национального продукта, стоящей в правой части.

Приведенные выше рассуждения во многом опираются на монетаристские представления и поэтому справедливы в той мере, в которой монетаристская теория отражает реальные процессы в экономике той или иной страны. Кроме того, рассмотрение опиралось в своей основе на макроэкономический подход, поэтому автоматически переносить её на микроэкономический уровень не следует, хотя общие закономерности денежного обращения так или иначе находят свое отражение в экономическом микроанализе, поскольку макроэкономика есть синтез микроэкономики.

Модель обмена $M = PY/V$ позволяет получить количественную зависимость для массы обращающихся денег.

Чем больше созданный в стране национальный продукт, тем больше денег должно находиться в обращении, ибо деньги по своей сути должны быть отражением товара.

В условиях инфляции масса денег в обращении оказывается чувствительной по отношению к уровню цен. Для нормального товарообмена и денежного обращения приходится увеличивать денежную массу в соответствии с ростом цен. Несоблюдение этого правила ведет к сбоям в функционировании товарно-денежной системы, нехватке денег в обращении.

Контрольные вопросы

1. Опишите основной кругооборот товаров и денег.
2. Дайте определение простым и сложным процентам.
3. Охарактеризуйте наращенные и дисконтированные суммы.
4. Как определяется рыночная цена акций и облигаций?
5. Как рассчитывается норма процента?

Словарь терминов

Акция – ценная бумага, закрепляющая права ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на долевое участие в управлении им и на часть имущества, остающегося после его ликвидации.

Облигация – эмиссионная ценная бумага, удостоверяющая право ее держателя на получение от лица, ее выпустившего (эмитента), в предусмотренный срок номинальной стоимости.

Опцион (англ. Option от лат. Optio – свободный выбор**) –** право выбора, предоставляемое одной из сторон контракта, договора, соглашения, сделки по какому-либо параметру или параметрам.

Фьючерсные контракты (англ. Futures contract/futures**) –** стандартный биржевой договор купли-продажи (поставки) биржевого актива в определенный момент времени в будущем по цене, установленной сторонами сделки в момент ее заключения.

Процентная ставка (англ. Rate of interest**) –** относительная величина процентных платежей на ссудный капитал за определенный период, как правило за год.

11. МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

Цели изучения

Основные задачи изучения модели регионального развития заключаются в следующем:

– ознакомиться с классификационными признаками модели регионального развития;
– получить навык работы с моделью регионального развития;
– показать роль и значение регионального моделирования.

Основные вопросы

Классификационные признаки модели: по охвату пространственно-временных характеристик; по аспекту исследования; по уровню в территориальной иерархии; по отраслевой природе производственных объектов; по глубине отражения территориальной иерархии.

Региональное моделирование. История возникновения регионального моделирования. Становление процесса исследования регионального моделирования. Пути совершенствования регионального моделирования.

11.1. МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

Математическое описание природно-климатической среды, экологических условий жизнедеятельности человека, природных ресурсов, в том числе флоры и фауны изучаемых регионов, закономерностей демографических и социально-экономических процессов, происходящих с его населением и системой производства как в пространственном, так и временном аспекте с целью анализа регионального социально-экономического развития и его использования в системах поддержки принятия решений, – все это относится к *модели регионального развития*.

Модели данного типа позволяют представить сложную структуру региональных систем, предвидеть изменения в их состоянии, определять меры и механизмы возможного воздействия на них в желательном направлении.

Классификация модели регионального развития производится по ряду признаков.

По охвату пространственно-временных характеристик выделяют:

– **статические** модели, относящиеся к фиксированному моменту времени – текущему, ожидаемому или прошлому;

– **динамические** модели, охватывающие процесс перехода от одного состояния к другому в течение того или иного периода;

– **точечные** модели, описывающие регион общими или средними показателями, не имеющими территориальной дифференциации;

– **пространственные** модели, содержащие характеристики как всего региона, так и его территориальных составляющих.

По аспекту исследования модели регионального развития подразделяют:

– на **географические** модели, описывающие пространственную дифференциацию региона в целом, его природных и антропогенных подсистем;

– на **демографические** модели, описывающие распределение, рост и перемещение населения;

– на **социальные** модели, дающие описание и прогноз экономических, инфраструктурных, экологических аспектов благосостояния населения;

– на **экономические** модели, отражающие темпы, параметры и факторы роста, структурной перестройки, эффективности региональной системы производства, инвестиционной привлекательности или неблагополучия региона, механизмы экономического воздействия региона с предприятиями, вышестоящими, нижестоящими и смежными территориальными звеньями.

В последнее время появилась тенденция к созданию комплексных моделей, охватывающих несколько аспектов регионального развития (например социально-экономические модельные комплексы с учетом демографических процессов, дифференциации природных условий и т.д.) и представляющих собой наиболее перспективный тип региональных моделей (подобные модели предлагались еще в 1970-е гг., но остались нереализованными).

По **уровню в территориальной иерархии** выделяют:

– модели развития субъектов Федерации;

– модели развития районов;

– модели развития городов.

По **преобладающим функциям** их отдельных зон модели регионального развития подразделяют следующим образом:

– природно-очерченных ландшафтов;

– урбанизированных территорий;

– городских агломераций;

– территориально-производственных комплексов.

По **отраслевой природе производственных объектов,** размещенных или размещаемых в регионе, модели регионального развития могут служить для обоснования:

– схем развития промышленности и ее отдельных отраслей;

– сельского, лесного и рыбного хозяйства;

– внешнего и внутреннего транспорта и связи;

– строительной базы и др.

По **глубине отражения территориальной иерархии** модели регионального развития могут быть *одно– и многоуровневыми*. Например, модель развития республики может включать только общереспубликанские показатели – это одноуровневая модель. Модель той же республики может содержать как общереспубликанские, так и городские или районные характеристики, с определенными отношениями между ними – это двухуровневая модель.

В первом случае одноуровневая модель верхнего уровня определяет ресурсные рамки и цены основных ресурсов для системы моделей второго уровня. Во втором, напротив, решения частных задач для низовых объектов увязываются с учетом общесистемных ограничений на верхнем уровне. Первый подход более соответствует централизованной, второй – децентрализованной схеме управления. Однако правильнее связывать схему управления не с механизмом выработки планового решения, а с тем порядком хозяйствования, который устанавливается с использованием скоординированного планового решения.

Модели регионального развития могут быть **изолированными** или **системными**. Если считать, что система цен на экспортируемую и импортируемую продукцию как во внутренних, так и внешних обменах установилась, а ожидаемые емкости соответствующих региональных рынков выявлены, то регион сам способен формировать свою внешнеэкономическую политику. В этом случае адекватным инструментарием могут служить *изолированные* модели регионального развития.

Если ожидаемая перестройка внешнеторговой политики данного региона может затронуть всю систему хозяйственных связей внутри страны и в межнациональных отношениях, повлиять на цены реализации продукции и услуг, то наиболее последовательным путем анализа этой ситуации является моделирование всей вовлекаемой в такие изменения системы регионов и их рынков. Этот подход приводит к межрегиональным моделям и к *системному* анализу, с упором на выявление и рационализацию связей инициирующего региона. Заказчиками и пользователями системных моделей могут быть регионы, их ассоциации или страны в целом.

В настоящее время большинство моделей регионального развития базируются на региональных и национальных межотраслевых балансах. Несмотря на то, что эти модели (и их системы) широко распространены во многих странах мира и целесообразность их применения очевидна, отношение к их разработке и использованию при формировании региональной политики двойственно. Основные причины этого имеют как научный, так и общеполитический характер.

Научная критика применяемых подходов указывает на ряд обстоятельств, ставящих под сомнение достоверность получаемых результатов и рекомендаций. К ним относятся методы оценки прогнозируемых объемов и структур конечного спроса как на национальном, так и на региональном уровнях. В действительности они зависят от целого ряда факторов внешней, внутренней, социальной политики, налоговой системы и т.д. Сдвиги в национальной и региональной структурах производства отражают динамичные процессы технологических инноваций, появления на рынках новых товаров и услуг, преобразований в хозяйственном механизме и др. Часто успех региона в сфере привлечения инвестиций, рост его социальной привлекательности зависят от сокращения местных налогов, гарантирования инвестиций, улучшения трудового и социального законодательства, усилий в области жилищного строительства или охраны окружающей среды. Схемы затраты-выпуск не всегда учитывают подобные факторы.

Против этих аргументов системным «модельным» направлением выдвинуты возражения. Проанализировав свои возможности и интересы, регион приходит к заключению, что ему крайне выгодно привлечь инвесторов, чтобы освоить давно открытое нефтяное месторождение. Но нефтяные компании находят гораздо более эффективным заняться совершенно другим проектом. В этих условиях регион не может осуществить свое локально выгодное решение. Вопрос об управлении развитием региона не может быть поставлен без согласования локальных проектов с «национальными» отраслями и другими хозяйственными субъектами национального ранга.

В этом противоречии между «конкретностью» локальных решений и их «близорукостью» состоит основная проблема дальнейшего развития методов регионального моделирования.

Преодоление этого противостояния двух подходов, их интеграция означали бы открытие новых перспектив для развития как самого хозяйственного механизма и планово-стратегического руководства им, так и, в частности, регионального моделирования – и на системном, национальном, и на собственно региональном (и местном) уровнях.

На основе опыта разработки планов социально-экономического развития регионов, широко распространившегося в РФ после 1992 г., можно определить некоторые пути решения этой стратегической проблемы.

Региональные и местные органы должны иметь широкие полномочия в решении перечисленных, преимущественно местных, проблем в строгом согласовании таких решений с национальным законодательством. Практика ведомственного вмешательства в прерогативы региональных органов лишает их самостоятельности и инициативы в осуществлении полномасштабного руководства решением собственно региональных проблем и замедляет развитие.

Модельные разработки, направленные на обоснование решений руководства экономикой и социальной сферой регионов, при попытках их реализации не должны наталкиваться на запретительные инструкции федеральных ведомств, что резко снижает эффективность работы регионального уровня управления как в отношении оперативного руководства, так и в отношении экспериментальной апробации различных механизмов углубления и коррекции реформ, включая их законодательное обеспечение на местном уровне.

Проработка проектов развития, технологической и организационной модернизации, локализации промышленных и транспортных объектов «национальных» и «международных» отраслей должна осуществляться в тесном контакте с центральными технико-экономическими и проектными отраслевыми институтами. Ее предварительная стадия завершается формированием бизнес-планов развития этих отраслей в регионе.

Модельная обработка таких бизнес-планов должна давать возможность им видоизменять их параметры в процессах межотраслевых согласований как на региональном, так и на межрегиональном уровне.

Региональные многоотраслевые модели, как и межрегиональные многоотраслевые, должны быть скорректированы таким образом, чтобы обеспечивать возможность итеративного согласования внутрирегиональных и межрегиональных оптимизаций, например путем расчета оценок региональных природных, трудовых и экологических ресурсов в зависимости от «спроса» отраслей на них.

Подготовительные работы по формированию экспертных решений, синтезу необходимых статистических и технико-экономических данных, введение их в определенные временные рамки, обеспечение необходимых обменов, возможно, примирили бы планово-регулирующее начало с децентрализованными технико-экономическими и размещенческими решениями корпораций и действиями регионов в сфере социально-экономического руководства собственными территориями.

11.2. РЕГИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Начало регионального моделирования связывают с выходом в 1826 г. работы немецкого ученого И.Г. Тюнена «Изолированное государство и его сельскохозяйственные структуры». Она основывалась на опыте ведения сельского хозяйства в имении автора вблизи города Росток на севере Германии. И.Г. Тюнен изучал общее положение дел в сельском хозяйстве, вопросы эффективности растениеводства, животноводства, лесного хозяйства, реализации их продукции в городе. На основании обобщения и анализа собранных данных Тюнен показал, каким образом формируется дифференциальная рента по размещению участков и как территория вокруг центрального города расчленяется на зоны, кольцевые или модифицированной формы при наличии рек, транспортных магистралей и т.п., когда наиболее эффективным становится совершенно определенное направление землепользования:

огородничество и садоводство, лесное хозяйство, зерновые культуры, культурные пастбища и животноводство, трехпольный севооборот, скотоводство на базе естественных лугов и т.д.

Это исследование включало вывод математических условий формирования границ зон, впервые обращало внимание на роль маржинальных (предельных) значений эффективности производства и сыграло важную роль в становлении математической экономии. В нем впервые был проведен количественный анализ процессов дифференциации производства, объясняющий специализацию отдельных районов с учетом природных и транспортных факторов, размещения в них тех или иных предприятий, направлений и величин транспортных потоков, указана роль городов в формировании пространственной неоднородности региона и т.д. Однако Тюнен описывал только «изолированный» регион, притом с ограниченным числом отраслей и единственным городским центром. Кроме того, подход был статическим: объяснялась сложившаяся ситуация в пространственном размещении производства. Попытки описания динамических процессов относились к двум специфическим областям – миграции населения и диффузии различных локальных изменений (от эпидемий до научно-технических нововведений).

В теории миграции получили широкое распространение *гравитационные модели,* построенные на аналогии с законом всемирного тяготения: потоки мигрантов между поселениями или регионами зависят от численности населения в них и имеют сходство с силой гравитационного взаимодействия между массами. Эта аналогия впервые была подмечена американским исследователем В. Дж. Рейли (1930 г.). В более развитом варианте подобные модели объясняют потенциалы миграции многими факторами; впоследствии они были значительно углублены, детализированы и трансформированы в модели «массового поведения» мигрантов.

Модели пространственной диффузии, разработанные в середине XX в. шведской школой Т. Хегерстранда, пытались дать единое описание процессов распространения инноваций по более или менее обширным, однородным или неоднородным территориальным ареалам.

Хотя *динамические модели* всегда содержат элемент предвидения или анализа будущего, описанные подходы не отвечают на вопрос, какие решения следует принять, чтобы направить процессы регионального развития в желательную сторону. Этот активный аспект регионального моделирования был развит в связи с задачей о наилучшем размещении предприятий. Основоположник локационного направления региональных исследований – немецкий экономист и социолог А. Вебер. Его подход был ориентирован на принятие решений о размещении на уровне фирмы (предприятия). Вебер обратил внимание на то, что при выборе искомого местоположения предприятия необходимо учитывать различия в суммарных транспортных издержках на сырье, материалы, а также на сбыт продукции. Впоследствии получил распространение метод построения кривых равных суммарных транспортных издержек для данного вида производства (они были названы **изодопанами**). Вебер показал, что анализ транспортных издержек должен быть по необходимости дополнен и скорректирован посредством учета стоимости рабочей силы, энергии и некоторых других факторов производства для окончательного выбора дислокации предприятия. Эта теория, обогащенная многими деталями, до сих пор используется при выборе пунктов производственного строительства.

Дальнейший шаг в региональном моделировании был связан с возвратом к рассмотрению регионов как целостных образований, а также их иерархической структуры. Во втором случае «изолированный» район мог служить лишь низовым звеном реальных многоступенчатых территориальных структур, которые ставились в соответствие административным единицам или стране в целом. Этот шаг был сделан **теорией центральных мест,** разработанной в 1930-1940 гг. немецкими учеными В. Кристаллером, А. Лешем и др. Если

Тюнен обращал внимание на роль города по отношению к прилегающей территории с точки зрения рынка сбыта, то в трактовке этих ученых город рассматривается как поставщик товаров и услуг. Производимые «центром» товары и услуги имеют более или менее широкий ареал распределения – рыночную зону, зону сбыта или дополняющий район. В этих пределах спрос падает по мере удаления от города, образуя на пространственной модели характерные **конусы спроса.** В зависимости от величины зон обслуживание сосредоточивается в более или менее крупных городских центрах, которые для охвата всей территории региона должны образовывать более или менее частые решетки. Кристаллер показал, что в условиях однородного пространства эти решетки должны иметь гексагональную структуру как модификацию максимально плотной системы круговых зон, обеспечивающую полное покрытие всей территории. Леш обобщил эту структуру с учетом иерархии центров разных рангов. Благодаря некоторым исследованиям в системе расселения удалось выявить ряд эмпирических закономерностей, управляющих населением (людностью) городов разных рангов.

Логика развития регионального моделирования требовала перехода к системному – многоотраслевому и межрегиональному – описанию национальной экономики и социальной сферы, изучению закономерностей ее функциональной и пространственной эволюции и лишь взаимосвязи с общим пониманием этих процессов возврата к более углубленному рассмотрению внутрирегиональных структур и их динамики.

Навстречу этой потребности шел созданный в 1950 – 1960 гг. американским экономистом В. Леонтьевым метод межотраслевого баланса, вскоре распространенный и на изучение межрегиональных пропорций. На этой основе У. Изард и Леонтьев в начале 1950 г. стали изучать системные многоотраслевые межрайонные задачи. В ранних версиях таких моделей предполагалось, что коэффициенты прямых затрат национального межотраслевого баланса могут переноситься и на региональные модели, и лишь впоследствии были предприняты усилия для самостоятельного обеспечения региональных блоков подобными данными. Но и после этого системные модельные построения неоднократно критиковались за игнорирование гораздо большей неустойчивости региональных данных сравнительно с национальными, их большей зависимости от внутриотраслевых структурных сдвигов, которые сами могут быть различными при разных вариантах регионального развития. В связи с этим системные модели на протяжении последующих десятилетий были радикально переработаны, усложнены и уточнены. Территориальная структура приобрела иерархический характер. На каждом уровне этой иерархии учитывались различия между отраслями **местными, районными, национальными и международными**. Конечный спрос на продукцию районных отраслей формируется по экзогенным районным данным и потребностям национальных отраслей, действующих в районе, а валовые выпуски районных отраслей формируются по обычной модели затраты – выпуск. Межрайонные пропорции должны рассчитываться только для национальных отраслей. Этот подход был развит Я. Тинбергеном в схему частичного межотраслевого баланса применительно к нуждам развивающихся стран.

Модели для изолированного района – от штата до небольшой местности – также базировались на схемах затраты-выпуск, но были углублены по сравнению с исходной версией за счет введения в таблицы затрат-выпуска дополнительных строк и столбцов, описывающих возможные расширения районной структуры производства; учета природных, трудовых, экологических ресурсов района в качестве ограничений возможного экономического развития; использования оптимизационной методологии для поиска «наилучшей» стратегии регионального развития. Немалую роль играли межрайонные и межстрановые сопоставления, временной и факторный анализ индексов и коэффициентов локализации базовых отраслей.

Сопоставление развития отечественного и зарубежного регионального моделирования позволяет сделать вывод, что экономико-мате-матическое направление, начавшее сравнительно быстро развиваться в СССР с 1960 г., в короткие сроки сумело выйти на мировой уровень модельной регионалистики и в ряде пунктов, в силу своей опоры на плановую идеологию, углубить наметившиеся в ней подходы и методы.

В то же время в 1980 гг., особенно в 1990 г., выяснилось, что региональные администрации, местные промышленные и финансовые круги заинтересованы в более детальном изучении перспектив региональной экономики, социальной сферы, оценках инвестиционной привлекательности регионов и т.д. В этой связи, как в деформированной экономике СССР, так и в реформируемой экономике России и других государств СНГ, не всегда качественно разрабатываются программы социально-экономического развития регионов. Они включают прогнозы развития базовых секторов этих регионов, их инфраструктуры и социальной сферы, пытаются учесть возможные преобразования в хозяйственных механизмах их функционирования.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение модели регионального развития.
2. По каким признакам осуществляется классификация модели регионального развития?
3. Дайте характеристику каждому классификационному признаку.
4. Охарактеризуйте этапы становления регионального моделирования.

Словарь терминов

Изодопаны – метод построения кривых равных суммарных транспортных издержек для данного вида производства.

Теория центральных мест – в этой теории город рассматривался преимущественно как поставщик индустриальных товаров.

Конусы спроса – производимые «центром» товары и услуги имеют широкий ареал распределения – рыночную зону, зону сбыта или дополняющий район. В этих пределах спрос падает по мере удаления от города.

12. МОДЕЛИ АНТИКРИЗИСНОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Цели изучения

Модели антикризисного менеджмента входят в состав типовых моделей менеджмента. Основные задачи изучения материала состоят в следующем:

- научиться оптимизировать параметры реорганизационной политики;
- ознакомиться с процессом оптимизации стратегии развития предприятия;
- изучить варианты построения прогнозных моделей по результатам деятельности предприятия;
- получить навыки в построении модели оптимизации бюджета развития компании.

Основные вопросы

Модель оптимизации реорганизационной политики. Баланс. Реструктуризация баланса. Политика управления активами и пассивами. Финансовая самостоятельность. Финансово-устойчивые предприятия.

Модель оптимизации стратегии развития предприятия. Построение оптимальных стратегий развития предприятий. Источники и направления распределения средств стратегического развития.

Прогнозные модели результатов деятельности предприятия. Установление зависимостей от изменения параметров реорганизационных политик и стратегий развития.

Модель оптимизации бюджета развития компании. Бюджетное планирование. Эффективный подход к формированию бюджета развития компании.

12.1. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ РЕОРГАНИЗАЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ

Для большинства неплатежеспособных предприятий неудовлетворительная структура баланса отождествляется с отставанием фактического уровня текущей ликвидности от его норматива $(K_{ТЛ} < 2)$ даже при достаточном уровне обеспеченности собственными средствами $(K_{ОСС} \geq 0{,}1)$.

Реорганизационные политики – процедуры реструктуризации балансов – позволяют перевести их в удовлетворительную структуру за счет реализации специально подобранного комплекса организационно-технических мероприятий. Но однозначно выбрать для практической реализации из возможных вариантов «чистых» и «смешанных» реорганизационных политик один, наиболее рациональный, затруднительно, так как если по прогнозируемым показателям платежеспособности, структуры баланса они равнозначны, то по прогнозным финансовым результатам они могут быть противоречивыми.

Оценить предпочтительность каждого из этих вариантов оказывается возможным, если сформулировать задачу оптимизации реорганизационных политик.

Для неплатежеспособных предприятий, находящихся в пред– или кризисном состояниях, постановка задачи оптимизации выбора направлений текущей деятельности будет заключаться в выборе наиболее эффективной реорганизационной для этой деятельности политики управления активами и пассивами.

Для финансово-устойчивых предприятий постановка задачи оптимизации сводится к поддержанию и развитию достигнутого уровня финансовой устойчивости за счет реализации такого комплекса организационно-технических мероприятий по функциям управления деятельностью, которые обеспечили бы возможность совершенствования большинства основных показателей финансовой состоятельности.

Задача оптимизации основных параметров текущей деятельности может быть представлена следующей общей постановкой:

$$\min F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i ; \qquad (12.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = q; \\ w = \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha ; \\ p'_i = o_i x_i = p''_i ;\ i = \overline{1,n}; \\ x_i - x_{i+1} > 0;\ i = \overline{1,n-1}, \end{cases}$$

где $F(x_i)$ – целевая функция задачи; n – число направлений реорганизационной политики (число независимых искомых переменных); δ_i – нормированная экспертная оценка приоритетности *i*-того направления текущей деятельности; $x_i (i = \overline{1,n})$ – искомые независимые переменные, вектор управления структурой имущества (искомая величина продаж одного вида средств, приобретения другого, погашения долгов); w – константа обеспечения текущей ликвидности ($w = 2КЗ - ОА$; КЗ – краткосрочная задолженность, ОА – оборотные активы); $a_i (i = \overline{1,n})$ – коэффициенты при неизвестных переменных в ограничении на обеспеченность собственными оборотными средствами; q – минимально допустимый уровень обеспеченности собственными оборотными средствами ($q = ВА + 0{,}1 \bullet ОА - КР$; ВА – внеоборотные активы, КР – капитал и резервы); α – верхний предел допустимых продаж и приобретений активов; $p'_i , p''_i (i = \overline{1,n})$ – соответственно нижняя и верхняя границы изменения i-того вида активов; $p_i (i = \overline{1,n})$ – удельный вес i-того вида активов предприятия в общей стоимости его имущества.

Применительно к типичной неудовлетворительной структуре баланса $(K_{ТЛ} < 2)$, $(K_{ОСС} = 0{,}1)$, характерной для большинства предприятий, возможные направления реорганизационной политики, отображаются следующей схемой:

$ВА - x_1$	КР
$ОА + (x_1 - x_2)$	$КЗ - x_2$

$A - x_2$	

Для этой схемы реструктуризации предельно допустимые параметры выбранной политики определятся из следующих соотношений между структурными разделами баланса, ограниченными нижними нормативными значениями показателей платежеспособности:

$$К_{ТЛ} = \frac{ОА + (x_1 - x_2)}{КЗ - x_2} = 2;$$

$$К_{ОСС} = \frac{КР - ВА + x_1}{ОА + (x_1 - x_2)} = 0{,}1,$$

а также возможностей практической реализации

$$x_2 - x_1 = \alpha \bullet ОА;$$

$$x_1 = \beta \bullet ВА;$$

$$x_2 = \gamma \bullet КЗ,$$

где α, β, γ – предельно допустимые для сохранения статуса деятельности предприятия размеры уменьшения оборотных активов (например до 20%), внеоборотных активов (10%), краткосрочной задолженности (50%).

12.2. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ

Экономико-организационными предпосылками построения оптимальных стратегий развития предприятий могут быть следующие условия:

– четко сформулированная и обоснованная генеральная цель – корпоративная миссия предприятия по конкретным направлениям деятельности и развития;

– удовлетворительная структура баланса, а также достаточный уровень финансовой устойчивости (платежеспособности);

– возможность развития производства стратегической группы товаров за счет привлечения на цели развития как внешних, так и собственных источников инвестиций.

Экономическая интерпретация комбинированного инвестирования заключается в следующем.

1. Первоочередным импульсом стратегического развития могут выступать средства внешнего кредитования – долгосрочные кредиты и займы $ДКЗ$, которые в концепции финансового анализа трактуются как собственные средства предприятия, а также источники собственных средств: фонд накопления, нераспределенная прибыль предыдущих периодов, сальдо результатов прочей реализации – в суммарном объеме x_1 (предполагается, что все денежные потоки дисконтированы по фактору времени и темпам инфляции).

Эти средства распределяются по двум направлениям. В размере x_2 – на цели развития, связанные с перепрофилированием предприятия, модернизацией и расширением производственных мощностей, технической подготовкой производства и маркетингом продукции стратегической группы, реализация которых требует прироста внеоборотных активов $ВА$. Другая часть этих источников средств $(x_1 - x_2)$ – на прирост оборотных активов $ОА$, прежде всего запасов и затрат, обусловленных освоением производства стратегической группы продукции и производством тактической группы.

2. Предполагается, что инвестиционный проект обоснован возможностью достижения (за счет реализации содержащихся в нем направлений развития) достаточной нормы прибыли на инвестируемый капитал, т.е. в размере, не меньшем средней расчетной ставки процента по заемным средствам $СРСП$, а это означает, что результатом инвестиций должно быть получение нераспределенной (чистой) прибыли в размере, не меньшем ax_1 (где $a = СРСП$).

3. Наряду с долгосрочными кредитами и займами $ДКЗ$ в качестве источника инвестиций в перспективное и текущее производства могут привлекаться краткосрочные кредиты и займы $ККЗ$, средства кредиторской задолженности $КЗ'$ в размере x_3, которые также

распределяются: в объеме x_4 – на цели развития (прирост ВА); в объеме $(x_3 - x_4)$ – на цели текущего производства (восполнение и прирост запасов ОА).

4. В свою очередь вновь образованная прибыль ax_1 может быть распределена ужё по трём направлениям: в размере x_5 – на погашение наиболее срочных обязательств по платежам в бюджеты всех уровней и внебюджетные фонды, кредиторской задолженности поставщикам, подрядчикам и персоналу предприятия, уплате процентов за пользование банковским кредитом; в размере x_6 – на цели развития, требующие прироста внеоборотных активов ВА; в размере $(ax_1 - x_5 - x_6)$ – на прирост оборотных активов ОА.

5. Предполагается, что результатом использования кредитных средств в объеме x_3 должно быть получение нераспределенной (чистой) прибыли ax_3.

6. Полученная прибыль ax_3 также подлежит последующему распределению по трем направлениям: в объеме x_7 – на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности; в объеме x_8 – на цели развития (прирост ВА); в объеме $(ax_3 - x_7 - x_8)$ – на цели текущего производства (прирост ОА).

В качестве целевой функции формирования стратегии развития могут быть использованы и другие функционалы, например:

выручка (прогнозная) от реализации стратегической и тактической групп товаров

$$\text{В} = \frac{\text{В}_{t-1}(\text{ОА} - \text{КЗ} + x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8)}{\text{ОА} + \text{КЗ}},$$

где $\text{В}_{t-1}, (\text{ОА} + \text{КЗ})$ – соответственно выручка и чистые оборотные активы отчетного периода; можно принять целевую функцию прогнозной выручки несколько иного вида

$$\text{В}' = x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8;$$

прибыль от реализации

$$\text{ЧП} = a(x_1 + x_3),$$

где a – величина единичной эффективности инвестиционных ресурсов («норма прибыли на капитал») может быть задана параметрически.

Имущество предприятия, его технический потенциал за срок реализации соответствующего инвестиционного проекта увеличится и составит

$$A + x_1 + ax_1 + x_3 - ax_3 - x_5 - x_7.$$

12.3. ПРОГНОЗНЫЕ МОДЕЛИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Прогноз финансовых результатов будет связан с установлением их функциональных зависимостей от изменений параметров реорганизационных политик и стратегий развития.

При выборе варианта реорганизационной политики необходимо учитывать, что структура баланса по объему основных и оборотных средств и их соотношениям, объему собственных и заемных средств и их соотношениям и т.д. влияет на величину получаемой предприятием прибыли и рентабельности его работы. Каждой структуре баланса соответствуют свои значения показателей прибыли и рентабельности. Особенно наглядно эта связь представляется соотношением

$$\text{R'CC} = (1 - \text{СНП})\text{RA} + (1 - \text{СНП})(\text{RA} - \text{СРСП})\text{ЗС}/\text{КР},$$

где R'CC – рентабельность собственных средств, определяемая как ЧП/КР; RA – рентабельность активов, рассчитываемая как БП/А; СНП – ставка налога на прибыль; СРСП – средняя расчетная ставка процента по всем видам задолженности («цена» заемных средств),

$$\text{СРСП} = (\text{БСП1} \bullet \text{ККЗ} + \text{БСП2} \bullet \text{ДКЗ})/(\text{ККЗ} + \text{ДКЗ}) = \%\text{КК/З}.$$

В этом выражении числитель представляет собой уплату процентов в размере $\%\text{К}$ за пользование краткосрочными ККЗ и долгосрочными ДКЗ кредитами и займами, приходящимися на расчетный период; $\text{БСП1}, \text{БСП2}$ – соответственно банковские процентные ставки по краткосрочным и долгосрочным кредитам и займам.

Здесь к параметрам структуры баланса будем относить величины отдельных его разделов $\text{А}, \text{ЗС}, \text{КР}$; к параметрам прибыльности и рентабельности работы предприятия – ЧП, БП, ЧП/КР, БП/А.

Взаимосвязь прогнозируемых параметров деятельности, отображаемых проектируемой структурой баланса, с прогнозируемыми результатами деятельности – показателями прибыли и рентабельности – может выражаться по-разному. Одним из возможных подходов может быть непосредственная увязка показателей структуры баланса с показателями выручки от реализации продукции и затрат, следовательно и с рентабельностью (прибыльностью) работы предприятия. Приближенно взаимосвязь прогнозируемой выручки от реализации продукции с прогнозируемой структурой баланса при прочих равных условиях конкретного производства в предыдущем отчетном $(t-1)$-м и последующем прогнозируемом t-м отрезках краткосрочного периода T (например квартал года) может быть представлена как

$$B_t = B_{t-1}(1 + x_1 - x_2 / \text{А}),$$

где x_1 – прогнозируемая величина сокращения внеоборотных активов, выявленная при параметризации выбранной эффективной текущей реорганизационной политики хозяйствования; x_2 – сокращение текущих пассивов (краткосрочной задолженности); $|x_1 - x_2|$ – абсолютная величина изменения оборотных активов, т.е. $x_1 < x_2$ -восполнение их запасов, при $x_1 > x_2$ – сокращение на величину $|x_1 - x_2|$.

Данная зависимость показывает, что улучшение платежеспособности предприятия, достигаемое как за счет сокращения оборотных средств и ускорения оборачиваемости при условии достаточности их уровня для непрерывности и равномерности производственного процесса, так и за счет увеличения оборотных средств, ведёт к росту выручки от реализуемой продукции.

Взаимосвязь между прогнозируемой выручкой от реализации продукции и прогнозируемыми затратами приближенно может быть представлена как

$$C_t = \left(C_{t-1} - \text{БСП}_1 \bullet \text{ККЗ}_{t-1}\right)\left(B_t / B_{t-1}\right) + \text{БСП}_1 \bullet \text{ККЗ}_t = \left(C_{t-1} - \%K_{t-1}\right)\left(B_t / B_{t-1}\right) + \%K_t,$$

где ККЗ_{t-1}, ККЗ_t – соответственно отчетные и прогнозируемые за квартал краткосрочные кредиты и займы; $\%K_{t-1}$, $\%K_t$ – то же, по уплате процентов за пользование банковским кредитом; B_{t-1}, B_t – то же, выручка от реализации; БСП_1 – ставка банковского процента на краткосрочные кредиты за квартал.

В свою очередь параметр ККЗ_t можно спрогнозировать исходя из следующих соображений:

0, если в прогнозной политике рассчитается $x_1 \geq ККЗ_{t-1}$;

x_1, если в прогнозе установлено, что значение $x_1 < ККЗ_{t-1}$,

т.е. эта альтернатива в принятии прогнозных значений ККЗ_t означает приоритетность первоочередного погашения краткосрочных кредитов и займов, так как по ним требуется выплата процентов.

12.4. МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ БЮДЖЕТА РАЗВИТИЯ КОМПАНИИ

В бюджете развития компании устанавливается рациональная структура ее средств (имущества) во взаимосвязи с источниками их формирования.

Одна из первоочередных задач бюджетного планирования состоит в выявлении направлений такой реструктуризации имущества и источников средств компании, при которой достигается требуемый уровень платежеспособности (ликвидности). К другим важнейшим требованиям, предъявляемым к проектируемому бюджету, отнесем его соответствие ранее установленным целям и инвестиционным потребностям развития компании.

В качестве информационной базы бюджетного планирования используются агрегированный баланс и отчет о финансовых результатах.

Отметим, что эффективный подход к формированию бюджета развития компании, отвечающий сформулированным нами требованиям, предложен в работе [10]. Этот подход отличают возможности использования различных схем (направлений) реструктуризации, позволяющих сформировать допустимое множество вариантов прогнозной структуры имущества с последующим отбором из них оптимального варианта согласно принятым критерию, ограничениям и граничным условиям.

Представляется, что из предложенных в этой работе критериев структурной реорганизации наиболее соответствует принципам стратегического развития компании – объекта исследований минимум структурных изменений стоимости имущества (актива) компании, так как при этом, очевидно, достигается наибольшая реальность достижения проектируемых в бюджете параметров развития компании. Кроме того, неопределенность выполнения бюджета за счет реализации специально сформированного комплекса организационно-технических мероприятий стратегического менеджмента компании может быть снижена и за счет сокращения периода (дискретности) бюджетного планирования до одного года.

Инвестиции формируются за счет внутренних источников и долгосрочных кредитов и займов (в объеме x_1), а также краткосрочных кредитов и займов и кредиторской задолженности (в объеме x_2). От использования их на цели развития компания может рассчитывать на получение нераспределенной (чистой) прибыли, направляемой за вычетом дивидендов в фонд накопления, в объеме, не меньшем, чем $\alpha(x_1 - x_2)$.

По усредненным оценкам доля инвестиций в развитие и расширение мощностей нефтедобычи, нефтепереработки и сбыта δ составляет 0,7, а на цели текущей деятельности эта доля $(1-\delta)$ составляет соответственно 0,3.

Исходя из сформулированных предпосылок и условий, можно придти к следующей общей постановке задачи оптимизации бюджетного планирования, в которой критерий и ограничения представлены неявными функциями финансовых результатов деятельности от искомых объемов инвестиций x_1, x_2:

$$\begin{cases} F_{t+1}(x_1, x_2) \longrightarrow \min \\ R_{t+1}(x_1, x_2) \geq R^*; \\ O_{t+1}(x_1, x_2) \geq O^*; \\ B_{t+1}(x_1, x_2) \geq B^*; \\ K_{ТЛ\, t+1}(x_1, x_2) \geq K'_{ТЛ}; \\ K_{ОСС\, t+1}(x_1, x_2) \geq K'_{ОСС}; \\ \underline{I_1} \leq x_1 \leq \overline{I_1}; \\ \underline{I_2} \leq x_2 \leq \overline{I_2}, \end{cases} \tag{12.2}$$

где $R_{t+1}(x_1,x_2)$, R^* – прогнозные уровни рентабельности продаж соответственно компании и ее главного конкурента – лидера нефтяного рынка; $O_{t+1}(x_1,x_2)$, O^* – то же, прогноз значения оборачиваемости активов; $B_{t+1}(x_1,x_2)$, B^* – то же, прогнозные объемы выручки; $K'_{ТЛ}$, $K'_{ОСС}$ – нормативные значения коэффициентов соответственно текущей ликвидности (равное двум) и обеспеченности собственными средствами (равное 0,1); $\underline{I_1}, \overline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_2}$ – нижние и верхние прогнозные значения инвестиционных ресурсов, привлекаемых компанией за счет соответственно собственных и внешних источников.

Если принимаемая нами целевая функция бюджетного планирования отражает требование минимизации управляющих воздействий x_1, x_2 на структуру имущества и средств (активы) компании, то тогда ее можно формализовать как

$$F_{t+1}(x_1,x_2) = (x_1 + x_2) \to \min .$$

Заслуживает внимания и исследование других критериев формирования бюджета, например максимизации доли рынка компании, которую можно представить возрастающей функцией относительного увеличения «работающего (функционирующего)» капитала $(OA_{t+1}-КЗ_{t+1})/(OA_t-КЗ_t)$:

$$F_{t+1}(x_1,x_2)=B_{t+1}(x_1,x_2)=\frac{OA_{t+1}(x_1,x_2)-КЗ_{t+1}(x_1,x_2)}{OA_t-КЗ_t}\to \max,$$

или, подставив из схемы формирования бюджета периода $(t+1)$ выражения $OA_{t+1}(x_1,x_2), КЗ_{t+1}(x_1,x_2)$ и исключив на время решения задачи постоянные величины выручки, оборотных активов и краткосрочной задолженности отчетного периода $(B_t, OA_t, КЗ_t)$, получим

$$F_{t+1}(x_1,x_2)=\left[(1-\delta)(1+\alpha)(x_1+x_2)-x_2\right]=\left[(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1+(\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2\right]\to \max.$$

Первые три ограничения задачи (12.2) формализуют требования достижения или превышения компанией уровня рентабельности продаж, оборачиваемости активов, а также объема продаж своего главного конкурента. Известно, что общая эффективность деятельности (рентабельность активов) R_A компании в двухфакторной модели Дюпона выражается произведением рентабельности продаж R на оборачиваемость ее активов O. Учет этих требований, обеспечивающих возможность достижения устойчивой в планируемой перспективе эффективности деятельности компании в целом, в данной задаче, по мнению авторов, является особенно существенным.

Данная целевая функция отображает требование минимума суммарных инвестиций в цели стратегического развития и обеспечения эффективной текущей деятельности.

Прогнозный уровень рентабельности продаж компании как функцию объема распределенных инвестиций можно представить отношением размера фонда накопления $\alpha(x_1+x_2)$, образованного в планируемом периоде за счет вновь сформированной прибыли, к величине планируемой выручки.

Требование, вытекающее из заявленной генеральной цели компании по реализации ее стратегического ресурснопроизводственного потенциала в достижении лидерства на нефтяных рынках ресурсов и продуктов, формулируется из соотношения

$$(1+\alpha-\delta-\alpha\delta)x_1+(\alpha-\delta-\alpha\delta)x_2 \geq \left[B^*/B_t-1\right](OA_t-КЗ_t).$$

Задачу оптимизации бюджетного планирования компании, в которой критерий и ограничения будут представлены уже явными функциями искомых объемов инвестиций на цели эффективного развития и текущей деятельности, можно записать

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \leq x_1 \leq \overline{I}_1; \\ \underline{I}_2 \leq x_2 \leq \overline{I}_2. \end{cases}$$

Отметим, что ориентация компании на ключевые показатели прогноза развития мировой компании – лидера нефтяных рынков – имеет скорее глобальный характер. Эту ориентацию следует рассматривать как долгосрочную доминанту развития. В кратко– или среднесрочном аспекте развития, отображаемом бюджетным проектированием, более реалистичным представляется целеполагание компании на прогнозные показатели своего ближайшего конкурента, также входящего в десятку мировых нефтяных компаний, например Техасе (США).

Для обоснования выбора другого возможного сценария развития компании в модель может быть введен критерий максимизации доли рынка как возрастающая функция «работающего» капитала. Результаты позволяют сформировать прогнозную структуру бюджета развития компании и соответствующие этой структуре финансовые показатели.

Отметим, что при реализации любой из моделей, как в направлении минимизации суммарного объема инвестиционных ресурсов на цели стратегического развития и на обеспечение текущей деятельности, так и в направлении максимизации доли рынка (дохода), достигаемые финансовые результаты почти идентичны. Оба направления стратегии развития сопоставимы и сопоставимы по своим результатам с прогнозными результатами деятельности ближайшего конкурента на мировом рынке нефти и нефтепродуктов.

К тому же реализация любой из моделей обеспечивает существенное повышение эффективности деятельности, оцениваемой по таким показателям, как уровень платежеспособности (коэффициенты текущей ликвидности и обеспеченности собственными средствами), уровень деловой активности (оборачиваемость активов), эффективность управления (показатели чистой рентабельности продаж и активов). Предпочтение должно отдаваться направлениям стратегии развития по модели минимизации суммарных инвестиций, так как потребность в них при этом будет несколько меньше.

Таким образом, полученные результаты реализации оптимизационных моделей развития и их аналитические оценки означают, что создаются предпосылки формирования эффективного стратегического потенциала и обеспечения конкурентных преимуществ компании как транснациональной корпорации.

Контрольные вопросы

1. В чем особенность реорганизационной политики предприятия?
2. Дайте характеристику реорганизационной политики в отношении неплатежеспособных предприятий и финансово-устойчивых предприятий.
3. Охарактеризуйте источники и направление распределения средств стратегического развития.
4. Какими параметрами определяется результат деятельности предприятия?
5. Из чего складывается бюджет развития компании?

Словарь терминов

Реорганизационная политика – процедура реструктуризации баланса – позволяет перевести его в удовлетворительную структуру за счет реализации специально подобранного комплекса организационно-технических мероприятий.

Баланс (франц. Balance – весы), первоначально – равенство двух экономических показателей, прежде всего доходов и расходов в бухгалтерском учете.

Стратегия долгосрочного развития – на уровне социально-экономической системы как целого направления на изменение или сохранение различных социально-экономических структур, в различной мере затрагивая такие аспекты общественного бытия, как производство, отношения между регионами внутри страны, внешнеэкономические связи данной системы, воспроизводство населения, образование, культура, наука.

13. МОДЕЛИ МАРКЕТИНГА

Цели изучения

Цель изучения – ознакомить с моделями маркетинга, которые в своих изменениях отражают ход развития изучаемого явления или процесса в экономике. Изучение раздела приведет к пониманию природы моделей маркетинга, содержания методов построения моделей маркетинга; получению навыков расчета показателей развития экономических процессов на основе установления специфики регрессионной модели спроса, используемой при построении моделей маркетинга.

Основные вопросы

Модель эджворта. Извлечение пользы каждым из игроков рынка. Построение линий равной выгодности и нахождение точек касания функций полезности.

Модель определения стадии жизненного цикла товара. Анализ изменений выручки по годам для всех товаров, входящих в анализируемую группу.

Модель выбора сегмента рынка. Сегмент рынка. Количество товара предприятия, представленного на данном сегменте рынка.

Структурная модель спроса. Потенциальные покупатели. Желаемая очередность покупок определенного товарного набора. Емкость рынка.

Регрессионная модель спроса. Определение зависимостей потребления товаров и услуг от различных факторов. Однофакторная линейная модель. Многофакторная модель. Метод наименьших квадратов. Регрессия. Коэффициент корреляции. Среднеквадратическое отклонение. Коэффициент детерминации. Двухфакторная линейная модель. Совокупный коэффициент детерминации.

13.1. МОДЕЛЬ ЭДЖВОРТА

Рассмотрим игру двух лиц с ненулевой суммой. Игрок A имеет (a) единиц товара, игрок B – (b) единиц второго товара. При обмене товарами каждый из игроков стремится извлечь пользу.

Для участника A итог обмена обозначим через (x, y), для участника B итог деятельности будет $(a - x, b - y)$. Для определяемых величин x и y учитываются ограничивающие условия. Значение x находится в пределах от 0 до a, значение y – в пределах от 0 до b.

В координатах (x, y) для прямоугольника допустимых значений искомых неизвестных строятся линии равной выгодности. Для участника A это совокупность параллельных выпуклых функций, для участника B – это совокупность параллельных вогнутых функций. Точки возможных условий контракта – это точки касания функций полезности результата для участников.

13.2. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАДИИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ТОВАРА

Модель основана на изменении выручки по годам для всех товаров, входящих в анализируемую группу.

Пусть изменения распределены нормально. Если рост выручки меньше $(\mu - 0{,}5\sigma)$, то это фаза спада; если больше $(\mu + 0{,}5\sigma)$, то фаза роста; если в промежутке, то зрелость или насыщение; если выручка до 5 % от прогнозируемого максимума выручки, то фаза внедрения. Если уменьшается доля продукта в сбыте предприятия, снижается маржинальный доход от продукта, то его нужно снимать с производства.

13.3. МОДЕЛЬ ВЫБОРА СЕГМЕНТОВ РЫНКА

Пусть n – число возможных сегментов рынка данного предприятия и данного товара $(n \geq 2)$; N – число сегментов, на которых предприятие желало бы продавать свой товар $(N \leq n)$; K_j – количество товара, которое может быть реализовано на сегменте (j); C_j – удельные переменные затраты по реализации товара на сегменте (j); Z_j – совокупные постоянные затраты по реализации товара на сегменте (j); P_j – цена товара на сегменте (j); D – минимально необходимая выручка.

Обозначим через x_j – переменную, которая показывает целесообразно или нет работать на сегменте (j).

Тогда модель выбора сегмента

$$\min L = \sum_{j=1}^{n} (C_j K_j + Z_j) x_j;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j K_j x_j \geq D; \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq N; \\ x_j = \{1 \wedge 0\}, (j = 1..n). \end{cases}$$

13.4. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ СПРОСА

Путем анкетирования потенциальных покупателей обрабатываются сведения о желаемой очередности покупок определенного товарного набора, а также о фактической очередности покупок этих товаров в прошлом.

По этим сведениям определяют вероятность P_{ij} того, что товар (i) будет куплен покупателем (j) по очередности. Эти вероятности составляют квадратную матрицу $P = \{P_{ij}\}$. Затем определяют удельный вес покупателей d_i, имеющих в наличии (i) видов товаров $(i = 0,1,\ldots,n-1)$.

Назовем **емкостью рынка** набор вероятностей r_i, означающих вероятность того, что покупатель, приобретая какой-то товар, купит именно товар (i). Обозначив через D и R соответственно вектор-столбцы удельных весов d_i и емкостей r_i:

$$D = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \ldots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix},$$

можно оценить емкость рынка в целом $R = P \cdot D$ и определить спрос на исследуемые товары.

13.5. РЕГРЕССИОНАЯ МОДЕЛЬ СПРОСА

Данная модель строится в виде уравнений, характеризующих зависимость потребления товаров и услуг от различных факторов. Модель может быть как однофакторной, так и многофакторной.

Рассмотрим сначала **однофакторную линейную модель** зависимости расходов на питание (y) от душевого дохода семей x_1. Она выражается линейной функцией вида

$$y = a_0 + a_1 x_1.$$

Параметры a_0 и a_1 находятся в результате решения системы нормальных уравнений, которая в свою очередь формируется с применением **метода наименьших квадратов**.

Сумма квадратов отклонений должна быть минимальна согласно методу наименьших отклонений, т.е.

$$\sum (y - \tilde{y})^2 \to \min,$$

где суммирование проводится по всем группам семей; y – исходные данные; $\tilde{y}$ – соответствующее значение, вычисленное по модели.

Система нормальных уравнений для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \left(\sum x_1\right) \cdot a_1 = \sum y; \\ \left(\sum x_1\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_1^2\right) \cdot a_1 = \sum y \cdot x_1. \end{cases}$$

Рассмотрим **двухфакторную линейную модель** зависимости расходов на питание (y) от душевого дохода семей x_1 и размера семей x_2.

Многофакторный (множественный) корреляционно-регрессионный анализ решает три задачи: определяет форму связи результативного признака с факторными, выявляет тесноту этой связи и устанавливает влияние отдельных факторов.

В нашем случае модель имеет вид $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Параметры a_0, a_1, a_2 находятся в результате решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \left(\sum x_1\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_2\right) \cdot a_2 = \sum y; \\ \left(\sum x_1\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_1^2\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_1 \cdot x_2\right) \cdot a_2 = \sum y \cdot x_1; \\ \left(\sum x_2\right) \cdot a_0 + \left(\sum x_1 \cdot x_2\right) \cdot a_1 + \left(\sum x_2^2\right) \cdot a_2 = \sum y \cdot x_2. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте характеристику игровой модели обмена товарами?
2. Как определить стадии жизненного цикла товара?
3. Дайте определение структурной модели спроса?
4. Сравнительная характеристика однофакторной и двухфакторной линейных моделей.

Словарь терминов

Сегмент – часть рынка, на котором предприятие желало бы продавать свой товар.

Емкость рынка – набор вероятностей, означающих вероятность того, что покупатель, приобретая какой-то товар, купит именно его.

Однофакторная линейная модель – выражается линейной функциональной зависимостью результирующего показателя от одного фактора.

Многофакторная регрессионная модель – определяет зависимость результирующего показателя от множества факторов, влияющих на него.

Коэффициент детерминации – показывает долю изменения (вариации) результативного признака под воздействием факторного признака.

Частный коэффициент эластичности – показывает, на сколько процентов изменится результативный признак, если значение одного из факторных признаков изменится на один процент, а значение другого факторного признака останется неизменным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акопян, А.С., Бушуев В.В., Голубев В.С.* Эргодинамическая модель человека и человеческий капитал / *А.С. Акопян, В.В. Бушуев, В.С. Голубев* // ОНС. 2002. №6.
2. *Алстеб, Якоб.* Модели мотивации: психология, социология, общество / *Якоб Алстеб.* // Социс. 2002. №9.
3. *Андреев, Г.И.* Особенности построения методического обеспечения управления сложных систем специального назначения в современных условиях / *Г.И. Андреев* // Экономика и математические методы. 2001 .Т. 37. № 2.
4. *Бариновский, К.А.* Моделирование процессов адаптации экономических систем / *К.А. Бариновский* // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 2.
5. *Бариновский, К.А.* Моделирование процессов повышения эффективности социальных систем организации / *К.А. Бариновский* // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 3.
6. *Бекларян, Л.А.* Об одной модели согласования инвестиционного контроля / *Л.А. Бекларян* // Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. № 3.
7. *Беленький, В.З.* Структура оптимального управления в двухпараметрической одномерной стохастической модели инвестирования / *В.З. Беленький*// Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. №2.
8. *Белоусов, А.Р.* Этапы становления Российской модели воспроизводства / *А.Р. Белоусов* // Проблемы прогнозирования. 2001. № 2.
9. *Борисов, В.Н.* Проблемы модернизации экономики России / *В.Н. Борисов*// Проблемы прогнозирования. 2000. № 6.
10. *Васильев, А.Н.* Модель самоорганизации рынка труда / *А.Н. Васильев*// Экономика и математические методы. 2001.Т. 37. № 2.
11. *Гаврилец, Ю.Н.* Теоретико-игровая модель формирования установок в референтной группе / *Ю.Н. Гаврилец*// Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. № 1.
12. *Гапонова, С.Н.* Необходимость анализа неустойчивости и нелинейности глобальных экономических процессов / *С.Н. Гапонова*// Социально-гуманитарные знания. 2002. №6.
13. *Глухов, В.В.* Математические методы и модели для менеджмента / *В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко*. – СПб.: Лань, 2000.
14. *Дадаян, В.С.* Макроэкономические модели и методы в экономике / *В.С. Дадаян*. – М.: Наука, 1983.
15. *Дорохина, Е.Ю.* Моделирование микроэкономики: учеб. пособ. для вузов / *Е.Ю. Дорохина, М.А. Халиков;* под общ. ред. *Н.П. Тихомирова*. – М.: Экзамен, 2003.

16. *Емец, О.А.* Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации / *О.А. Емец*// Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. № 2.
17. *Замков, О.О.* Математические методы в экономике: учебник / *О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных*. – М.: МГУ им. Ломоносова, Дело и Сервис, 1999.
18. *Исаков, Б.И.* Статистическое моделирование и прогнозирование демографического развития России в двадцать первом веке / *Б.И. Исаков, А.Б. Исаков, Е.Н. Кузнецов, М. Дугмаль* // Вопросы статистики. 2002. №3.
19. *Клейнер, Г.Б.* Многофакторные производственные функции с постоянными эластичностями предельной замены факторов / *Г.Б. Клейнер*// Экономика и математические методы. 2000. Т. 36. № 1.
20. *Клепач, А.* Экономический рост России: амбиции и реальные перспективы / *А. Клепач, С. Смирнов, С. Пухов, Д. Ибрагимова*// Вопросы экономики. 2001. №8.
21. *Коваленко, А.Г.* Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка / *А.Г. Коваленко*// Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 2.
22. *Костюк, В.Н.* Длинные волны Кондратьева и теория долговременного экономического роста / *В.Н. Костюк*// ОНС. 2002. №6.
23. *Котов, М.В.* Моделирование народнохозяйственных процессов: учеб. пособ. / *М.В. Котов.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
24. *Краснощеков, П.С.* Принцип построения моделей: учебник / *П.С. Краснощеков*. – М.: ФАЗИС Вычислительный центр, 2000.
25. *Лопатников, Л.И.* Экономико-математический словарь / *Л.И. Лопатников.* – М.: Наука , 1993.
26. *Максимов, В.А.* Прогнозирование доходности инвестиций на фондовом рынке / *В.А. Максимов*// Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 1.
27. *Малыхин, В.И.* Математическое моделирование экономики: учеб.-практ. пособ. / *В.И. Малыхин.* – М.: УРАО, 1998.
28. Математическое моделирование макроэкономических процессов. учеб. пособ. / *И.В. Котов, Г.В. Шалабин, А.В. Воронцовский, В.Ю. Лисицин, Н.В. Похомова.* – Л.: ЛГУ, 1980.
29. *Минюк, С.А.* Математические методы и модели в экономике: учеб. пособ. / *С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич.* – Минск: ТетраСистемс, 2002.
30. *Некипелов, А.Д.* Глобализация и стратегия развития экономики России / *А.Д. Некипелов* // Проблемы прогнозирования. 2001. № 4.

31. *Осипов, А.В.* Двухсекторная имитационная модель прогнозирования развития экономики / *А.В. Осипов*// Проблемы прогнозирования. 2001. № 4.
32. *Петров, А.А.* Опыт математического моделирования экономики / *А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шаманин*. – М.: Энергоатомиздат, 1996.
33. *Пугачев, В.Ф.* Народнохозяйственная оценка инвестиционных проектов / *В.Ф. Пугачев* // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37. № 2.
34. *Райская, Н.Н.* Гребная регрессионная модель промышленного роста / *Н.Н. Райская, Я.В. Сергиенко, А.А. Френкель*// Вопросы статистики. 2001. №10.
35. *Садков, В.Г.* Модель социально – сословной структуры общества и совершенствование статистики населения / *В.Г. Садков, А.П. Долганов, В.В. Головко, С.В. Рыбаков*// Вопросы статистики. 2002. №6.
36. *Серебряков, Г.Р.* Опыт построения динамической межотраслевой равновесной модели российской экономики / *Г.Р. Серебряков*// Проблемы прогнозирования. 2000. № 2.
37. *Сотников, А.Н.* Моделирование динамики и прогнозирование цены отдельного вида продукции / *А.Н. Сотников*// Вопросы статистики. 2002. №6.
38. *Сошникова, А.А.* Методологические вопросы прогнозирования межотраслевого баланса / *А.А. Сошникова, В.Н. Тамашевич*// Вопросы статистики. 2002. №10.
39. *Суворов, А.В.* Методологические проблемы прогнозирования уровня жизни населения / *А.В. Суворов*// Проблемы прогнозирования. 2000. № 1.
40. *Суворов, Н.В.* Макроэкономический анализ технологических и структурных изменений в отечественной экономике / *А.В. Суворов* // Проблемы прогнозирования. 1995. № 5.
41. *Тимофеева, Л.К.* Экономико-математические методы и модели в анализе хозяйственной деятельности / *Л.К. Тимофеева*. – Самара, 1992.
42. *Френкель, А.А.* Прогноз развития экономики России на 2002-2003 гг. / *А.А. Френкель* // Вопросы статистики. 2002. №6.
43. *Шаккум, М.Л.* Использование моделей для социально-экономических исследований / *М.Л. Шаккум*// Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 2.
44. *Шелобаев, С.И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: учеб. пособ. для вузов / *С.И. Шелобаев*. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
45. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособ. для вузов / под ред. *В.В. Федосеева*. – М.: ЮНИТИ, 2001.
46. Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. *В.И. Данилов-Данильян.* – М.: Большая Российская энциклопедия: ИНФРА-М, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ХОРИНА Ирина Вениаминовна,
БРАЖНИКОВ Максим Алексеевич

Методы исследования и моделирование национальной экономики

Редактор *С.И. Костерина*
Компьютерная вёрстка *И. О. Миняева*
Выпускающий редактор *Н.В. Беганова*

Подп. в печать 14.04.10.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. п.л. 11,62. Уч.-изд.л. 11,59.
Тираж 1000 экз.   Рег.№ 541/09.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус №8